SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Filiala ARGEŞ

MATEMATICA: IPOTEZE ŞI CONCLUZII

Workshop

A III-a ediţie

11 decembrie 2021

Coordonator

Dr. Laurenţiu-Cristian DEACONU

Editor

Livia-Georgiana PUZDREA

Cuprins

MATEMATICA: IPOTEZE ŞI CONCLUZII
Workshop, A III-a ediţie, 11 decembrie 2021, pg. 5-10

e^{ix}: "Cea mai celebră dintre toate formulele"

Mihaela CONSTANTIN

"Există o formulă celebră, poate cea mai compactă şi mai celebră dintre toate formulele, prelucrare a lui Euler după o descoperire a lui De Moivre: $e^{\pi i} + 1 = 0$. Această formulă atrage în egală masură misticii, savanţii, filozofii, matematicienii." (Edward Kasner şi James Newman, *Mathematics and Imagination*, 1940)."

Cu greu am putea găsi vreo zonă a matematicii neatinsă de Euler: şi-a lăsat amprenta în analiză, teoria numerelor, mecanică şi hidrodinamică, topologia şi teoria despre mişcarea lunii. Leonhard Euler (1707-1783) este un Mozart al matematicii, un om ale cărui imense realizări sunt estimate la cel puţin şaptezeci de volume.

Numele lui Euler apare mai frecvent decât oricare altul în matematica clasică dar are mari merite în filozofie, religie. De asemenea îi datorăm lui Euler multe din simbolurile matematice: i, π, e, $f(x)$. Leonhard Euler s-a născut în Basel în 1707; tatăl său Paul Euler era pastor şi intenţiona să-şi îndemne fiul spre aceeaşi carieră dar Paul se pricepea şi la matematică pe care o studiase sub îndrumarea lui Jakob Bernoulli; când şi-a dat seama că fiul său are aptitudini matematice, s-a răzgândit. Fratele lui Jakob Bernoulli, Johann, îi dădea lecţii particulare de matematică tânărului Euler şi l-a convins pe Paul să-şi lase fiul să-şi urmeze înclinaţiile.

În 1720 Leonhard a început studiile la Universitatea din Basel; a absolvit în numai 2 ani. Începând cu acea perioadă şi până la vârsta de 76 de ani, creativitatea sa matematică nu a cunoscut limite. Mulţi ani i-a petrecut în străăinătate.

În 1727 a acceptat invitaţia Academiei de Ştiinţe din St. Petersburg. Din nou numele Bernoulli este implicat.

În perioada când Johann îi dădea lecţii, Euler se împrietenise cu cei doi fii ai săi, Daniel şi Nicolaus. Tinerii Bernoulli se aflau deja de câţiva ani la Academia de Ştiinţe din St. Petersburg unde din nefericire, Nicolaus a murit înecat. Ei au insistat să fie invitat şi Euler dar în ziua în care a sosit şi trebuia să-şi ia postul în primire, împărăteasa Ecaterina a murit, lăsând Rusia să se scufunde în incertitudine şi tiranie. Euler a stat în Rusia paisprezece ani. Academia a ajuns să fie privită ca o cheltuială inutilă care apăsa bugetul statului, drept care i-au fost tăiate fondurile. Apoi Euler şi-a început activitatea ca adjunct în fiziologie.

În 1731 numărul e apărea din nou în contextul unei ecuaţii diferenţiale. Euler îl definea drept "acel număr al cărui logaritm hiperbolic este $= 1$".

În 1733 a primit un post de profesor plin în matematici şi în acelaşi an s-a căsătorit cu Catherine Gsell; au avut treisprezece copii, dar numai cinci au supravieţuit dincolo de copilărie.

În 1736 apare numărul e în lucrarea *Mechanica*[1] lui Euler. După unele păreri a ales litera e pentru că este prima literă a cuvântului "exponent". O primă explicaţie mai plauzibilă ar fi alegerea naturală a primei litere din alfabet "nefolosită" încă, deoarece literele a, b, c, d apar frecvent în alte împrejurări în matematică. Alţii consideră că ar fi ales iniţiala numelui său, acest lucru este improbabil fiind un om extrem de modest.

În 1741 a fost invitat de Frederick cel Mare la Academia de Ştiinţe din Berlin; invitaţia făcea parte din eforturile depuse de monarhie pentru creşterea importanţei Prusiei în domeniul ştiinţelor şi artelor. Deşi nu a fost în relaţii bune tot timpul cu Frederick, Euler a acceptat şi a rămas aici 25 de ani.

În 1748 apare lucrarea *Introductio in analysin infinitorum*, în două volume considerate baza analizei matematice moderne. În această lucrare Euler prezintă numeroasele sale descoperiri referitoare la serii infinite, produse infinite şi fracţii continue.

Printre acestea se află suma seriei $\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots$ pentru toate valorile pare ale lui k de la 2 la 26 (pentru $k=2$, seria converge la $\frac{\pi^2}{6}$, după cum demonstrase în 1736, dezlegând o enigmă care rezistase chiar şi fraţilor Bernoulli).

În 1766 Euler, acum în vârstă de aproape 60 de ani, a acceptat o invitaţie din partea noului suveran rus, Ecaterina a II-a (cea: "Mare"), să revină la St. Petersburg (succesorul său la Berlin fiind Lagrange). Deşi împărăteasa i-a oferit toate avantajele materiale, viaţa sa din acea perioadă a fost marcată de diverse tragedii. În timpul primei perioade de timp petrecute în Rusia îşi pierduse vederea la ochiul drept (după unele păreri datorită suprasolicitării, după altele, deoarece privea Soarele fără să-şi protejeje ochii).

În 1771, în cea de-a doua perioadă şi-a pierdut şi celălalt ochi. În acelaşi an i-a ars casa şi multe din manuscrisele sale s-au pierdut. Cinci ani mai târziu i-a murit soţia dar la 70 de ani s-a recăsătorit. De acum era complet orb, dar a continuat să lucreze dictând numeroasele sale rezultate copiilor şi studenţilor săi. În acest sens i-a fost de mare ajutor fenomenala sa memorie. Se spune că era capabil să facă în minte calcule cu numere de 50 de cifre şi putea reţine lungi secvenţe de argumente matematice fară a le scrie pe hârtie.

Între 1768 şi 1772 Euler a scris lucrarea, *Scrisori către o prinţesă germană despre diverse teme de fizică şi filozofie*, publicată în trei volume[2]. În toate scrierile sale ştiinţifice (fie tehnice, fie expozitorii), Euler folosea întotdeauna un limbaj simplu şi clar, ceea ce ajuta cititorul să-i urmărească firul ideilor.

Pe 18 septembrie 1783 calcula orbita planetei nou descoperite Uranus. Seara, în timp ce se juca cu nepotul său, a avut un atac subit şi a murit pe loc. A descoperit celebra formulă $V-L+F=2$ care face legătura între numărul de vârfuri, numărul de laturi şi numărul de feţe ale unui poliedru simplu (un corp fără găuri).

În *Introductio* de asemenea, Euler defineşte funcţia (în esenţă este cea pe care o folosim astăzi în matematica aplicată şi în fizică), dar şi notaţia modernă $f(x)$ pentru funcţie a fost introdusă tot de Euler şi a folosit-o pentru tot felul de funcţii explicite şi implicite:

1) În cazul funcţiilor *explicite*, variabila independentă este izolată într- unul din membrii ecuaţiei, de exemplu: $y=x^2$;

[1]Este prima lucrare publicată în care apare numărul e, tot aici Euler a stabilit bazele mecanicii analitice.
[2]Prințesa era nepoata lui Frederick iar Euler îi dădea lecții particulare.

2) În cazul funcţiilor *implicite* cele două variabile apar împreună în acelaşi membru, de exemplu: $2x + 3y = 4$;

3) *Funcţii de mai multe variabile independente*, de exemplu: $u = f(x, y)$ şi $u = f(x, y, z)$;

4) *Funçţii continue şi discontinue* (funcţiile pe care el le numea *discontinue* erau de fapt funcţii cu derivata discontinuă, cu un salt brusc al pantei graficului, nu cu o întrerupere a graficului însuşi).

În *Introductio* a atras prima dată atenţia asupra rolului central al numărului e şi funcţiei e^x în analiză. Până la Euler funçţia exponenţială era privită doar ca reversul funcţiei logaritmice. El a pus cele două funçcţii la aceleşi nivel ca importanţă, dându-le definiţii independente.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) \tag{2}$$

Faptul că cele două funcţii de mai sus, sunt una inversa celeilalte, apare şi în calculul următor: vom rezolva ecuaţia $y = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, cu necunoscuta x:

$$y^{\frac{1}{n}} = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$y^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{x}{n}$$

$$n \cdot y^{\frac{1}{n}} - n = x$$

Deci, $x = n \cdot \left(y^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

O sarcină mai dificilă, dincolo de schimbarea literelor x şi y, este aceea de a demonstra că limitele celor două expresii sunt funcţii inverse. Dar această demonstraţie, presupune manipularea procesului de trecere la limită folosind unele argumente subtile, însă pe timpul lui Euler tratarea cu oarecare nonşalanţă era o practică tolerată. În consecinţă, Euler folosea litera i pentru a desemna, *un număr infinit* şi chiar scria membrul drept al relaţiei (1) ca $\left(1 + \dfrac{x}{i}\right)^i$, ceea ce astăzi nu ar fi posibil.

Euler utilizase deja litera e pentru a reprezenta numărul $2,71828\ldots$ într-un manuscris intitulat, *Reflecţii asupra unor experimente recente de tragere cu tunul*, scrisă în 1727 când avea 20 de ani, dar publicată în 1862 la 80 de ani după moartea sa. Euler a folosit definiţia pe care a dat-o funcţiei exponenţiale (1) pentru a dezvolta această funçcţie în serie de puteri. În felul acesta a dedus seria numerică [3]:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{3}$$

Se observă, că termenii acestei serii sunt uşor de calculat (termenii fiecărei sume descresc rapid, deci seria converge foarte repede; mai mult, deoarece toţi termenii sunt pozitivi, convergenţa este monotonă). Primele 7 sume parţiale ale seriei sunt: $2 = 2$

---

[3] $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n$ (formula lui Newton). pentru $a = 1$ și $b = \frac{1}{n}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$. După ce mai arajăm puțin termenii din membrul drept relația devine: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots + \frac{1}{n^n}$, calculăm limita lui $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ când $n \to \infty$. Deoarece limitele lui $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ când $n \to \infty$ sunt toate egale cu 0, obținem Relația (3).

$$2+\frac{1}{2}=2,5$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=2,666\ldots$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2,708333\ldots$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=2,716666\ldots$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=2,7180555\ldots$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}=2,718253968\ldots$$

Înlocuind $\frac{1}{n}$ cu $\frac{x}{n}$ în relaţia (3), obţinem seria de puteri a lui e^x:

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3}+\ldots \tag{4}$$

Într-adevăr creşterea rapidă a numitorilor determină o convergenţă foarte rapidă a seriei. Din această serie se obţin de obicei valorile numerice ale lui e^x. În general, primii câţiva termeni sunt suficienţi pentru a obţine precizia dorită.

Înlocuind variabila x cu ix în relaţia (4), obţinem seria de puteri a lui e^{ix}:

$$e^{ix}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots \tag{5}$$

Se ştie că $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ şi aşa mai departe (valorile puterilor sale întregi se repetă din patru în patru). Dacă la sumele finite, ordinea termenilor nu afecta rezultatul, în cazul seriilor infinite schimbarea termenilor poate duce la modificarea sumei seriei sau poate chiar transforma o serie convergentă într-una divergentă [4]. Însă prin schimbarea ordinii termenilor relaţia de mai sus a ajuns la:

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right) \tag{6}$$

Încă din acele vremuri se ştia că seriile care apar în două paranteze sunt dezvoltări în serii de puteri ale funcţiilor trigonometrice $\cos x$ şi $\sin x$. Astfel, Euler obţinuse formula remarcabilă:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{7}$$

Această formulă leagă într-o singură relaţie funcţia exponenţială (chiar dacă are variabila imaginară) şi trigonometrică obişnuită.ă Folosind identităţile: $\cos(-x)=\cos x$ şi $\sin(-x)=-\sin x$ şi înlocuind ix cu $-ix$ în relaţia (7) se poate obţine:

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x \tag{8}$$

[4]Euler a comis o greșeală colectând termenii reali și serapându-i de cei imaginari, el trăia în epoca experimentelor libere și toate acestea la vremea accea nu erau cunoscute.

Euler a adunat şi a scăzut relaţiile (7) şi (8) şi a putut să obţină $\cos x$ şi $\sin x$ cu ajutorul funcţiilor exponenţiale.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{9}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{10}$$

Aceste relaţii sunt cunoscute sub denumirea de formulele lui Euler pentru funcţiile trigonometrice.

Tot în relaţia (7) a înlocuit pe $x = \pi$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$. Euler a oţinut formula $e^{\pi i} = -1$. Rescriind această formulă ca: $e^{\pi i} + 1 = 0$, obţinem o formulă care leagă cele mai importante cinci constante în matematică şi cele mai importante trei operaţii matematice: adunarea, înmulţirea şi ridicarea la putere). Aceste cinci constante simbolizează cele patru ramuri majore ale matematicii clasice: aritmetica, reprezentată prin 0 şi 1; algebra, prin i; geometria, prin π; analiza, prin e.

În *Introductio* Euler s-a ocupat şi de un alt proces infinit: fracţiile continue. Să luăm de exemplu fracţia $\frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}}$.

Euler, a demonstrate că orice număr raţional se poate scrie ca o farcţie continuă finită, în timp ce un număr iraţional se poate reprezenta printr-o fracţie continuă infită, în care lanţul de fracţii nu se termină niciodată. De exemplu, pentru numărul iraţional $\sqrt{2}$, avem:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$

Folosind relaţia (3) a dedus numeroase fracţii continue interesante (cele două exemple de mai jos) în care apare numărul e. Aici, Euler arată cum se poate scrie o serie infinită sub formă de fracţie continuă şi viceversa.

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + \cdots}}}}}$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}$$

"Finisarea", demonstrarea exactă, riguroă a numeroaselor rezultate pe care acest savant le-a descoperit a fost lăsată unei noi generaţii de matematicieni, din care amintim pe Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) şi Augustin Louis Cauchy (1789-1857), aceste eforturi de completare a demonstraţiilor continuând chiar şi în secolul al douăzecelea.

Pentru Benjamin Peirce, unul dintre matematicienii de frunte din secolul al nouăsprezecelea ai Universităţii Harvard, formula lui Euler $e^{\pi i} = -1$ a fost o revelaţie. După ce a descoperit-o, s-a adresat studenţilor săi cu următoarele cuvinte: *Domnilor, formula este cu* *siguranţă adevărată, în mod absolut paradoxal; nu o putem înţelege şi nu ştim ce înseamnă. Dar am demonstrat-o şi ştim că trebuie să exprime adevărul.*[5]

Autorul Eli Maor, a publicat cu precădere în reviste de matematică şi pedagogia matematicii, printre acestea fiind *Mathematics Teacher şi International Journal for Mathematics Education in Science and Technology.* Cele trei cărţi ale sale publicate la Princeton University Press, *To Infinity and Beyond*, *e: The Story of a Number* şi *Trigonometric Delights* (acestea din urmă traduse şi în limba română la editura Theta), au fost primite cu entuziasm şi au cunoscut deja mai multe versiuni în alte limbi.

Bibliografie

[1] Eli Maor, *e Povestea unui număr*, Editura Theta, Bucureşti, 2006

[2] Eli Maor, *Splendori ale trigonometriei. O perspectivă istorică*, Editura Theta, Bucureşti, 2006

[3] Website www.theta.ro, email: theta@theta.ro

Şcoala Gimnazială Nr. 1 Budeasa
mihaelaconstantin3@yahoo.com

[5] Admirația lui Benjamin pentru formula lui Euler l-a făcut să propună două simboluni neobișnuite pentru e și mai exact ss. Plecând de la $e^{\pi i} = -1, (e^{\pi i})^{-1} = (-1)^{-i}, \sqrt{e^{\pi}} = \sqrt{(-1)^{-i}} = \sqrt[i]{i}$ a ajuns la ss. Mai târziu, cei doi fii ai săi, matematicieni și ei, au continuat să utilizeze notația propusă de tatăl lor.

MATEMATICA: IPOTEZE ŞI CONCLUZII
Workshop, A III-a ediţie, 11 decembrie 2021, pg. 11-15

Cine este numărul e?

Radu Dumitru DEACONESCU

Lucrarea de faţă îşi propune să amintească pe scurt istoria numărului e, câteva dintre proprietăţile acestuia, precum şi locul ocupat de el în algebră şi analiză, ca limită a unor şiruri şi ca bază a logaritmilor neperieni. În plus de asta, o demonstraţie a iraţionalităţii lui e, prin rezolvarea unui subiect apărut într-o lucrare de specialitate [3].

1 Scurt istoric

Inventarea logaritmilor de către Jost Burgi (1552-1632) şi Lord John Napier (latinizat Neper) (1550-1617) a fost urmată de simplificarea acestora de către Henri Briggs (1556-1630). Logaritmii au revoluţionat calculul ştiinţific şi tehnic de o manieră fără precedent, până la apariţia calculului digital şi a calculatorului electronic. Calculele astronomice din secolul al XVI-lea şi calculele ştiinţifice din secolul al XVIII-lea necesitau rezolvarea rapidă a înmulţirilor şi împărţirilor cu numere foarte mici sau foarte mari. Apariţia logaritmilor a contribuit la rezolvarea acestor probleme, transformând complicatele probleme de înmulţire şi împărţire în simple opera ctii de adunare şi scădere. Până în perioada anilor 1970 riglele de calcul logaritmic au fost singurele instrumente de calcul de masă existente, locul lor fiind luat de calculatoarele electronice de buzunar. Două numere au servit ţn mod deosebit ca baze pentru logaritmi: 10 (pentru logaritmii zecimali) şi e (pentru logaritmii naturali – neperieni).

Acesta din urmă, prin proprietăţile remarcabile pe care le are, a devenit unul dintre cele mai importante numere din matematică (alături de numărul de aur π şi φ). John Napier a consacrat în 1614 logaritmilor naturali o lucrare intitulată „Mirifici logarithmorum canonis descriptio", urmată de o alta în 1619. Termenul logaritm are etimologie greacă: *logos* (raţiune) şi *arithmos* (număr), adică *numărul raţiunii*. În prima lucrare noţiunea de bază nu era explicitată, dar calculele arată că totuşi aceasta are o valoare apropiată de $\frac{1}{e}$.

Se cunosc definiţiile clasice ale numărului e ca limită a unor şiruri devenite şi ele celebre. Astfel:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{2}$$

Consider că nu prezintă interes demonstraţia faptului că şirurile ce apar în relaţiile (3.2) şi (2) sunt convergente, demonstraţie ce apare în toate manualele de clasa a XI-a, la capitolul "Şiruri" (vezi [1], pag 88) şi de asemenea în lucrările de specialitate.

Formula (3.2) a fost stabilită de către Jacques Bernoulli (1654-1705).

Leonhard Euler (1707-1783), în 1743, a stabilit formula mai generală:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{1'}$$

Formula (2) a fost stabilită de către Daniel Bernoulli (1700-1782), în 1728.

O demonstraţie a formulei (2) este dată şi de rezolvarea exerciţiului IV pag 103 din lucrarea [4] sau a exerciţiului IV pag 119 din aceeaşi lucrare [4], particularizând $x = 1$. Aceleaşi exerciţii apar şi în lucrarea [3], la pag 73 şi pag 89.

Valoarea aproximativă a lui e este $2,71$.

2 Raţionalitatea lui e

În încercarea de a oferi o demonstraţie a faptului că e este iraţional, mergând pe firul unei probleme apărute în [4], pag. 105 (sau lucrarea [3], pag 75), voi pleca de la relaţia (2) pe care o voi considera cunoscută, fără a relua demonstraţia ei.

Iată enunţul parţial al problemei Subiectul IV, din lucrarea [4]:

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ şi } b_n = a_n + \frac{1}{n!\cdot n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

.

Admitem cunoscut că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent către e.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

c) Să se arate că $a_{n+1} < e < b, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Utilizând inegalităţile de la punctul c) să se arate că $\dfrac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \dfrac{1}{n!\cdot n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Utilizând inegalitățţile de la punctul d) să se arate că numărul e este iraţional.

Rezolvare: a) Pentru studiul monotoniei şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ vom proceda la analiza semnului diferenţei $a_{n+1} - a_n - \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) În cazul şirului $(b_n)_{n\geq 1}$ avem:

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1)!\cdot(n+1)} - \frac{1}{n!\cdot n} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!\cdot(n+1)} - \frac{1}{n!\cdot n} =$$

$$-\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} < 0$$

Deci $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict descrescător.

c) Din faptul că $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ rezultă că $a_n < e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci, implicit şi că

$$a_{n+1} < e. \tag{3}$$

Din faptul că $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{n!\cdot n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n = e$ avem că $b_n < e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$b_{n+1} < e. \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) obţinem că

$$a_{n+1} < e < b, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{5}$$

d) Făcând în relaţia (5) înlocuirile $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}$ şi $b_n = a_n + \frac{1}{n!\cdot n}$ obţinem:

$$a_n + \frac{1}{(n+1)!} < e < a_n + \frac{1}{n!\cdot n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \frac{1}{n!\cdot n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{6}$$

e) Apelăm la metoda reducerii la absurd. Presupunem că $e \in \mathbb{Q}$.

Deci $e = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}^*$. Cum relaţia (6) e verificată pentru orice valoare naturală nenulă a lui n, îi atribuim lui n valoarea q. Astfel obţinem:

$$\frac{1}{(q+1)!} < \frac{p}{q} - a < \frac{1}{q!\cdot 1}. \tag{7}$$

Înmulţind inegalităţile (7) cu $q!$ vom avea:

$$0 < \frac{1}{q+1} < p\cdot(q-1)! - a_q\cdot q! < \frac{1}{q} \leq 1. \tag{8}$$

Aşadar,

$$0 < p\cdot(q-1)! - a_q\cdot q! < 1. \tag{9}$$

Însă $a_q\cdot q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{q!} \in \mathbb{N}^*$ şi implicit

$$q\cdot(q-1)! - a_q\cdot q! \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

Relaţiile (9) şi (10) sunt contradictorii, deci presupunerea făcută, cum că e ar fi raţional a fost una falsă. Deci $e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.De fapt demonstraţia a fost dată de Jean Baptiste Fourier (1768-1830) în anul 1815.

Euler a stabilit primul, în 1737, acum mai bine de 250 de ani, că e este iraţional. După mai bine de 100 de ani, în 1873 Charles Hermite (1822-1901) a dovedit că e este transcendent peste corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raţionale. Nouă ani mai târziu, în 1882, Ferdinand Lindemann (1852- 1939) a stabilit transcendenţa lui π, plecând de la rezultatele obţinute de Hermite.

O altă demonstraţie, care reprezintă de fapt o variaţie pe aceeaşi temă a faptului că e este iraţional pleacă de la definiţia lui e ca fiind:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + +\frac{1}{n!} + \dots$$

Astfel, $e \cdot n! = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots = M + N$, unde

$$M = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!} \in \mathbb{N} \text{ şi } N = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots$$

Avem că

$$N = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)} + \dots$$

Dar

$$\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)} < \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$$
$$\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)} < \frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sumând relaţiile de mai sus obţinem că

$$N < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} + +\frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)} + \dots \tag{11}$$

Dar

$$\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$
$$\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$
$$\frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Făcând înlocuirile în inegalitatea (11) obţinem:

$$N < \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \dots = \frac{2}{n+1}.$$

În concluzie

$$0 < N < \frac{2}{n+1} \tag{12}$$

Presupunând că e ar fi raţional, având forma $e = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, prin înlocuire ajungem la $\frac{a}{b} \cdot n! = M + N \Rightarrow a \cdot n! = b \cdot M + b \cdot N \Rightarrow b \cdot N = a \cdot n! - b \cdot M$.

Avem că a, b, n, M sunt întregi şi deci

$$b \cdot N \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

Revenind la relaţia (12), prin multiplicare cu $b > 0$ obţinem:

$$0 < b \cdot N < \frac{2 \cdot b}{n+1} \tag{14}$$

Alegând valori pentru $n > 2 \cdot b - 1 \Rightarrow n + 1 > 2 \cdot b \Rightarrow 0 < b \cdot N < 1$.

Aşadar $b \cdot N \notin \mathbb{Z}$, relaţie în contradicţie cu (13); presupunerea făcŭtă, cum că e ar fi raţional a fost una falşă. Deci $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Primele o sută de zecimale ale lui e sunt:

$$e = 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766$$

$$303535475945713821785251664274\ldots.$$

3 Importanţa lui e

Cum spuneam e reprezintă o constantă fundamentală a matematicii, ce joacă un rol foarte important în întreaga matematică şi nu numai. e joacă un rol important în studiul limitelor şirurilor sau funcţiilor ce se află în cazul exceptat 1^{∞} şi implicit ȋn studiul derivabilităţii funcţiilor exponenţială şi logaritmică într-o bază oarecare. Se obţin limite remarcabile de funcţii plecând de la definiţia numărului e (vezi (1) şi (2)).

În [5] apare o bogată bibliografie care conţine lucrări ce abordează rolul jucat de e în matematică.

Bibliografie

[1] Ganga, M. - Elemente de analiză matematică, Editura Mathpress, 1996

[2] Marcus, S. - Şocul matematicii, Editura Albatros, Bucureşti, 1987

[3] Savu, L., Constantinescu, G., Lupşor, V., Sanda, N., Marinescu, D. - Ghid de pregătire pentru examenul de Bacalaureat la matematică 2005, Editura Sigma, Bucureşti, 2005

[4] Savu, I., Stoica, A. Bacalaureat la matematică 2006, Editura GIL, Zalău, 2005

[5] Vernescu, A. - Numărul e şi importanţa sa, G.M. - A, 1 (2005), 1-19.

COLEGIUL NAŢIONAL "ZINCA GOLESCU" PITEŞTI
radudeaconescu3@gmail.com

MATEMATICA: IPOTEZE ŞI CONCLUZII
Workshop, A III-a ediţie, 11 decembrie 2021, pg. 17-21

O modalitate de folosire a unei strategii anticipative în rezolvarea unei probleme de geometrie în ciclul gimnazial

Neculae DINUŢĂ

Lucrarea prezintă una dintre strategiile importante ale predării-învăţări geometriei în ciclul gimnazial, strategiile anticipative.

În prima parte sunt prezentate o serie de aspecte teoretice privind modul de abordare a strategiilor anticipative, care au o importanţă deosebită în organizarea operaţilor rezolutive.

De asemenea sunt evidenţiate cele trei serii de strategii: strategii anticipativ-exploratorii, strategii anticipativ-rezolutive şi strategii anticipativ-executive.

Cea de-a doua parte este consacrată folosirii strategiilor amintite în cazul rezolvării problemelor de geometrie plană, plecând de la o ipoteză generală, ce constituie ideea de plecare şi care determină o zonă numită zona căutării euristice.

Pa baza unei probleme de geometrie de clasa a VII-a se elaborează o schemă ce pune în evidenţă cele trei serii de strategii anticipative şi mai ales aspectele caracteristice ale posibilităţilor individuale parcurse în rezolvarea problemei.

Lucrarea se încheie cu câteva concluzii privind modul de folosire a strategiilor anticipative în rezolvarea problemelor de geometrie plană în ciclul gimnazial şi cu o serie de aspecte formative ale acestor strategii.

1 Aspecte teoretice privind modul de abordare a strategiilor anticipative în realizarea procesului rezolutiv

Atunci când rezolvăm o problemă este necesară o cunoaştere a structurii acesteia şi o cunoaştere a posibilităţilor elevului de a se confrunta cu condiţiile date şi mai ales cu crearea motivaţiei necesare învingerii obstacolului.

Pentru aceasta, elevul, trebuie să înţeleagă problema, motiv pentru care cadrul didactic trebuie să vină cu un set de activităţi ce sunt direcţionate spre găsirea unor variante rezolutive optime, trebuie să ştie să o analizeze şi trebuie să creeze premisele antrenării proceselor cognitive.

Dacă aceste condiţii sunt asigurate, atunci poate fi abordată realizarea ideii de rezolvare, idee care constituie conturarea modelului rezolutiv şi punerea în evidenţă a etapei de sinteză ce presupune realizarea planului de rezolvare.

Realizarea procesului rezolutiv presupune conturarea unor procese rezolutive strâns legate de etapele parcurse unde regăsim evidenţierea cunoştinţelor necesare, regulile de inferenţă folosite şi strategia pe care o aplicăm.

În cadrul acestui parcurs, strategia este cea care direcţionează procesul rezolutiv, iar regulile de inferenţă realizează raţionamentul matematic propriu-zis.

Strategia de abordarea a unei probleme este reprezentată de acele reguli de selectare şi combinare a propoziţiilor matematice, ca procedee euristice de realizare a căii de rezolvare şi presupune o explorare a tuturor posibilităţilor de finalizare.

Astfel, în procesul de rezolvare a unei probleme se disting două planuri: un plan complet ce presupune explorarea tuturor posibilităţilor şi căruia îi corespunde o strategie algoritmică şi un plan care recurge la o activitate de căutare, căruia îi corespunde o strategie euristică.

Chiar dacă strategia euristică reduce activitatea de căutare, în rezolvarea unei probleme aceasta se împleteşte strâns cu strategia algoritmică. În acest mod un elev se apropie de soluţia unei probleme pe cale euristică şi apoi are posibilitatea să-i reprezinte schema algoritmică.

În cadrul procesului rezolutiv o activitate formativă este aceea de a-l învăţa pe elev să folosească strategiile de autoghidare, care-i permit participarea efectivă la procesul de învăţare şi la formarea modului de a gândi matematic.

Aceste strategii de autoghidare permit o actualizare a cunoştinţelor necesare prin intermediul unor îndrumări verbale, ce pot dirija gândirea elevului spre direcţiile apropierii de finalizare şi pot motiva fiecare etapă a procesului rezolutiv.

După o perioadă de îndrumare a modului de formulare şi folosire a acestora, este important pentru elev ca în desfăşurarea procesului rezolutiv, să-şi adreseze singur întrebări sub forma unor auto instrucţiuni.

Prin aceste îndrumări, pe care le numim, îndrumări de orientare a gândirii "se urmăreşte ca fiecare cadru didactic să-l ajute, dar nici mult şi nici prea puţin, astfel ca elevului să-i revină o parte raţională din activitate".

La matematică, îndrumările de orientare a gǎndirii permit îmbunătăţirea capacităţii rezolutive prin formarea unor abilităţi de reprezentare corectă a problemei, prin conştientizarea cunoaşterii procedeelor euristice şi prin cunoaşterea spaţiului problematic.

Totuşi nu trebuie să confundăm strategiile care ghidează rezolvarea problemelor de matematică cu strategiile rezolutive, deoarece acestea din urmă se formează în procesul instruirii.

Strategiile rezolutive cuprind şi procedeele euristice, procedeele de rezolvare a problemelor tipice şi schemele de inferenţă, ceea ce spune că iau naştere pe baza acţiunii mentale a elevului.

Toate aspectele prezentate evidenţiază faptul că procesul rezolutiv vine cu o serie de finalităţi de ordin instructiv, formativ şi afectiv.

Din punct de vedere instructiv, finalitatea actului rezolutiv, se referă la descoperirea de noi procedee şi elaborare de strategii a unor tipuri speciale de probleme de tip reproductiv creative şi de tip demonstrativ explicative.

Actul rezolutiv, din punct de vedere formativ, este direcţionat spre formarea capacităţilor de cunoaştere, de înţelegere, de analiză şi sinteză, ce antrenează şi dezvoltă mecanismele cognitive precum memoria, imaginaţia şi gândirea.

Din punct de vedere afectiv, finalitatea actului rezolutiv o regăsim în dezvoltarea personalităţii elevului prin dezvoltarea spiritului critic, stimularea creativităţii şi educarea însuşirilor atenţiei.

Adoptarea unei strategii didactice (cf. [2], pag. 84) *este dependentă de capacitatea cadrului didactic de a acţiona eficient în realizarea obiectivelor propuse, ceea ce presupune nu numai competenţe de specialitate, ci şi competenţă pedagogică şi metodică.*

De aceea, rezolvarea unei probleme de matematică (cf. [1], pag. 46) *este un act psihologic cu implicaţii deosebit de valoroase atât în plan cognitiv cât şi în cel afectiv al personalităţii elevului.*

Iată de ce strategia folosită trebuie să fie privită ca o activitate de angajare a gândirii, ca o confruntare a operaţilor de anticipare şi ca un act bazat pe o intuiţie ce descoperă dintr-o daă structura fundamentală a problemei.

În cazul rezolvării problemelor de geometrie, actul rezolutiv devine un act de reconstrucţie mintală a unor structuri anterior cunoscute, ajutat de modelul figural, care prin imaginea sa reprezintă un suport al gândirii.

Prin această modalitate, intuiţia geometrică, devine activă şi pune în valoare o serie de scheme ale unor acţiuni anterioare sau scheme anticipative ale unor acţiuni ulterioare, care dezvoltă capacităţile intelectuale.

În cadrul acestor activităţi anticipative regăsim trei tipuri de strategii, care propun identificarea unor scheme de acţiune mentală, necesare mai ales, în rezolvarea problemelor de geometrie. Aceste strategii pe care le folosim sunt strategiile anticipativ-exploratorii, strategiile anticipativ-rezolutive şi strategiile anticipativ-executive.

Strategiile anticipativ-exploratorii, sunt strategiile, care după înțelegerea conţinutului problemei, vin cu o serie de elemente euristice ce ghidează procesul rezolutiv spre modalităţile generale ale încadrării acesteia într-o anumită tipologie.

După această încadrare intră în acţiune strategiile anticipativ-rezolutive, care prezintă modul de abordare a actului rezolutiv, adică sunt prezentate planurile specifice de căutare a soluţiilor pe fiecare palier şi modul de orientare în găsirea acestora.

În final intră în acţiune a treia categorie, strategiile anticipativ-executive, care au un caracter analitic şi vizează în mod deosebit organizarea operaţilor rezolutive, adică finalizarea procesului rezolutiv.

2 Modalitate practică de folosire a strategiei anticipative în rezolvarea unei probleme de geometrie în ciclul gimnazială

Din aspectele prezentate mai sus, putem afirma, că folosirea strategiilor anticipative pot transforma procesul rezolutiv într-un proces activ, ce scoate în evidenţă acele raţionamente ce identifică schemele de acţiune mentală necesare în finalizarea rezolvării unei probleme.

În prima parte a rezolvării problemei de geometrie intervin strategiile anticipativ exploratorii, care se ocupă în mod special de clarificarea conţinutului acesteia, de modul de clarificare a unor elemente specifice modelului figurativ şi de legătura acestora cu o serie de teoreme ce fundamentează geometria sintetică.

Procesul rezolutiv se integrează prin intervenţia strategiilor anticipativ-exploratorii, cu ajutorul cărora sunt explorate toate operaţiile rezolutive legate de concluzia problemei şi de găsirea legăturilor dintre elementele specifice ale modelului figurativ.

Strategiile anticipative se regăsesc (cf. [1], pag. 58) *şi în modelul structural al etapelor căutării al lui Kuliutkin, după care procesul rezolvării problemelor de descompune în trei etape.*

Aceste etape, numite etape nodale, urmează procesul rezolutiv prin anticiparea unor operaţii rezolutive ce pleacă de la elaborarea unei ipoteze generale, care este transformată într-o ipoteză specifică şi se ajunge la o ipoteză particulară legată de rezultatul final.

Pentru a vedea modul practic de acțiune al strategiilor anticipative, vom lua un exemplu de problemă de geometrie, cu ajutorul căreia vom parcurge atât etapizarea lui Kuliutkin cât şi modelul de structurare a celor trei tipuri de strategii anticipative.

Problema 1 *Într-un triunghi ABC, fie M mijlocul laturii $[AB]$ şi $N \in [AM]$. Paralela prin N la AB intersectează BM în punctul P, paralela prin M la BC intersectează BN în punctul Q, iar paralela prin N la AQ intersectează BC în punctul S. Să se arate că $PS \| AC$.*

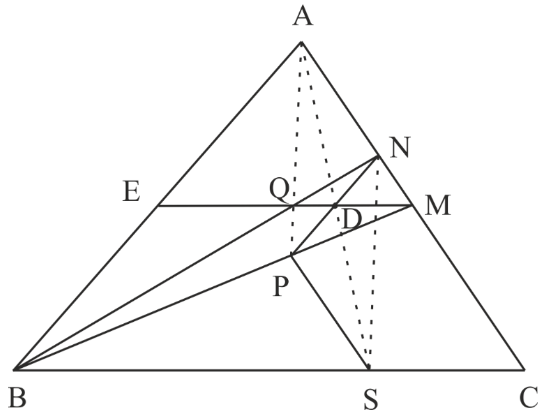


Figura 1.

Pentru început vom da o modalitate de rezolvare, după care vom încerca prezentarea celor trei ipoteze şi prezentarea modelului anticipativ.

Fie $MQ \cap AB = \{E\}$ şi $NP \cap ME = \{D\}$. Din relaţiile existente în figură avem: $AE = EB$ ($[ME]$ linie mijlocie) şi $ND = DP$.

Din figura 1 patrulaterul $ANPB$ este trapez, de unde punctele A, Q, P sunt coliniare. Se demonstrează că $\triangle ADN \equiv \triangle SDN$ (ULU), de unde $[AP] \equiv [SN]$.

Dacă $[AP] \equiv [SN]$ şi $AP \| SN$, patrulaterul $ANSP$ paralelogram, de unde $PS \| AC$.

Prima etapă pe care o parcurgem în modelul structural al lui Kuliutkin se numeşte "zona căutării euristice" şi este legată de elaborarea ipotezei generale.

În cazul problemei date ipoteza generală

(IG): presupunem că $PS \| AC$.

A doua etapă prezintă operaţiile rezolutive ce vizează cerinţele iniţiale ale problemei şi care transformă ipoteza generală într-o ipoteză specifică.

(IS): Fie $MQ \cap AB = \{E\}$şi $NP \cap ME = \{D\}$. Din relaţiile existente în figură avem: $AE = EB$ ($[ME]$ linie mijlocie) şi $ND = DP$.

De asemenea, patrulaterul $ANPB$ este trapez, de unde punctele A, Q, P sunt coliniare. Se demonstrează că $\triangle ADN \equiv \triangle SDN$ (ULU), de unde $[AP] \equiv [SN]$.

Ultima etapă este consacrată ipotezei particulare, care derivă din ipoteze specifică şi aduce procesul rezolutiv la finalizare.

Astfel,
(IP): Dacă $[AP] \equiv [SN]$ şi $AP \| SN$, patrulaterul $ANSP$ paralelogram, de unde $PS \| AC$.

Modelul anticipativ (Tabelul 1), prezintă tactica de abordare a problemei de geometrie pe fiecare tip de strategie şi caracteristicile operaţiilor rezolutive.

Folosirea modelului anticipativ, schematizează operaţiile rezolutive şi le transformă în mecanisme ale gândirii, stimulează conjecturi eficiente şi permite scurtarea căii de rezolvare a problemei.

Tabelul 1. Modelul anticipativ

Serii de strategii	Traseul urmat în cadrul fiecărei serii	Elemente de conţinut pe fiecare strategie
Strategii anticipativ-exploratorii	Se caută să se arate că $\triangle ADN \equiv \triangle SDN$ (ULU), de unde $[AP] \equiv [SN]$.	Dacă $MQ \cap AB = \{E\}$ şi $NP \cap ME = \{D\}$, atunci din relaţiile existente în figură avem: $AE = EB$ ($[ME]$ linie mijlocie) şi $ND = DP$.
Strategii anticipativ-rezolutive	Se demonstrează că $\triangle ADN \equiv \triangle SDN$ (ULU)	Patrulaterul $ANPB$ este trapez, de unde punctele A, Q, P sunt coliniare.
Strategii executive	Se arată că patrulaterul $ANSP$ este paralelogram, de unde $PS \| AN$ şi deci $PS \| AC$.	Se foloseşte faptul că $[AP] \equiv [SN]$ şi $AP \| SN$.

3 Concluzii

Din cele două modalităţi de expunere a problemei putem spune că folosirea strategiilor anticipative participă la formarea unei strategii rezolutive care selectează şi dirijează modul de rezolvare şi organizează modul de a gândi al elevului.

Prin folosirea strategiilor anticipative în rezolvarea problemelor de geometrie putem forma la elev scheme cognitive referitoare la concepte c si reguli, scheme operatorii de aplicare al lor şi elaborarea unor strategii rezolutive.

Bibliografie

[1] Cîrjan, Fl. (2002), Didactica matematicii, Editura Corint, Bucureşti

[2] Dinuţă, N. (2013), Metodica predării matematicii în gimnaziu şi liceu, Editura Tiparg, Piteşti

Universitatea din Piteşti
neculae.dinuta@yahoo.com

MATEMATICA: IPOTEZE ŞI CONCLUZII
Workshop, A III-a ediţie, 11 decembrie 2021, pg. 23-25

Studiu privind rezolvarea ecuaţiilor şi inecuaţiilor exponenţiale

Veronica MARIN

Funcţia exponenţială susţine mintea antrenată a elevilor, de aceea în continuare propun tipuri de ecuaţii şi apoi aplicaţii ale lor.

1 Tipuri de ecuaţii exponenţiale

I. $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1$.
Ecuaţia are soluţie dacă $b > 0$.
Prin logaritmarea ambilor membri ai ecuaţiei se obţine $\log_a a^{f(x)} = \log_a b$ care este ecuaţie algebrică şi de aici prin rezolvare obţinem soluţia.

II. $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$.
Din injectivitatea funţiei exponenţiale se obţine ecuaţia $f(x) = g(x)$, ecuaţie algebrică.

III. $c_1 a^{2f(x)} + c_2 a^{f(x)} + c_3 = 0, a > 0, a \neq 1$. Ecuaţiile de acest tip se rezolvă prin substituţia $a^{f(x)} = y > 0$ şi se obţine ecuaţia de gradul al II-lea $c_1 y^2 + c_2 y + c_3 = 0$.

2 Exerciţii propuse

Exerciţiul 1 *Să se rezolve ecuaţiile*

a) $5^{2x-1} = \sqrt{5}$

b) $12^x + 10^x = 8^x + 15^x$

c) $3^x + 4^x - 6^x = 1$

Rezolvare: a) $5^{2x-1} = \sqrt{5} \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x - 1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = 1 + \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$

b) $12^x + 10^x = 8^x + 15^x \Rightarrow 12^x - 8^x + 10^x - 15^x = 0 \Rightarrow 4^x \cdot (3^x - 2^x) - 5^x \cdot (3^x - 2^x) = 0 \Rightarrow (3^x - 2^x) \cdot (4^x - 5^x) = 0 \Rightarrow 3^x - 2^x = 0$ sau $4^x - 5^x = 0 \Rightarrow 3^x = 2^x$ sau $4^x = 5^x \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1$ sau $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$

În final soluţia este $x = 0$.

c) $3^x + 4^x - 6^x = 1 \Rightarrow 3^x + 4^x + 2^x - 6^x - 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x(2^x + 1 - 3^x) - (2^x + 1 - 3^x) = 0 \Rightarrow (2^x + 1 - 3^x) \cdot (2^x - 1) = 0 \Rightarrow 2^x - 1 = 0$ sau $2^x + 1 - 3^x = 0$

1) Din $2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

2) $2^x + 1 - 3^x = 0 / : 3^x \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 1$

Considerăm funcţia $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, g(x) = 1$.

Deoarece funcţia f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ iar g este funcţie constantă pe $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = g(x)$ are soluţie unică.

Constatăm că această soluţie este $x = 1$.

În final obţinem soluţia $x \in \{0, 1\}$.

Exerciţiul 2 *Să se rezolve:*

a) $3^x + 4^x = 25$

b) $x^{\lg 3} + 3^{\lg x} = 2x$

Rezolvare: a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3^x + 4^x$, este injectivă, strict crescătoare, fiind sumă de funcţii strict crescătoare (exponenţiale de baze supraunitare), rezultă $x = 2$ este soluţie unică.

b) Condiţia $x > 0$ şi folosind faptul că $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, (\forall) a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ecuaţia devine $3^{\lg x} + 3^{\lg x} = 2x \Rightarrow 3^{\lg x} = x \Rightarrow (\lg x) \cdot (\lg 3) = \lg x \Rightarrow \lg x = 0 \Rightarrow x = 1$ este soluţie unică.

Exerciţiul 3 *a) Arătaţi că* $2^{x^2} + 2^{\frac{1}{x^2}} \geq 4, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $a, b \in (0, 1)$ *arătaţi că* $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$.

c) $2^{\sin x} + 2^{\cos x} = \sqrt{2^{2-\sqrt{2}}}$.

Rezolvare: a) Se aplică inegalitatea mediilor de 2 ori $(a + b \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot b})$.

$$2^{x^2} + 2^{\frac{1}{x^2}} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x^2}}} = 2 \cdot \sqrt{2^{x^2 + \frac{1}{x^2}}} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}}} = 4.$$

b) Din inegalitatea mediilor $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \geq \dfrac{2ab}{a+b}, (\forall) a, b > 0$.

Cum $a, b \in (0, 1)$ (logaritmul cu baza a şi b este descrescător)

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} + \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(\log_a a + \log_a b + \log_b a + \log_b b\right) =$$

$$1 + \frac{1}{2}\left(\log_a b + \log_b a\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} = 2$$

.

c) Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

$$|\sin x+\cos|\leq\sqrt{(1^2+1^2)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}=\sqrt{2},(\forall)x\in\mathbb{R}.$$

Cu inegalitatea mediilor obţinem $2^{\sin x}+2^{\cos x}\geq 2\cdot 2^{\sin x+\cos x}=2^{\frac{2+\sin x+\cos x}{2}}\geq 2^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2^{2-\sqrt{2}}}$, prin urmare totul se reduce la $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}\in\left\{\frac{3\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow$ soluţia $S=\left\{\frac{5\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Exerciţiul 4 *a) Să se rezolve în* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *ecuaţia:* $3^x+4^x=y^2$.

b) Să se rezolve ecuaţia: $\log_9\left(1+x+x^2\right)-2\log_4 x=0$.

Rezolvare: a) Dacă $x=0\Rightarrow y^2=2$ care nu are soluţii întregi.
Dacă $x\in\mathbb{Z}$ şi $x\leq-1\Rightarrow 3^x+4^x\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ şi $y^2\geq(\forall)y\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţie.
Fie $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}^*$ o soluţie a ecuaţiei $3^x+4^x=y^2\Rightarrow 3^x=y^2-4^x\Rightarrow 3^x=(y-2^x)\cdot(y+2^x)\Rightarrow$ singura soluţie posibilă este $\begin{cases}y-2^x=1\\ y+2^x=3\end{cases}\Rightarrow 2\cdot 2^x=3^x-1\Rightarrow x=2$ şi $y=\pm 5$

b) Condiţie de existenţă $x>0$

$\log_9\left(1+x+x^2\right)=2\log_4 x=y\Rightarrow\begin{cases}x^2=&4^y\\ 1+x+x^2=&9^y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=&2^y\\ 1+4^y+8^y=&9^y/:9^y\end{cases}\Rightarrow$
$\left(\frac{1}{9}\right)^y+\left(\frac{4}{9}\right)^y+\left(\frac{8}{9}\right)^y=1$

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(y)=\left(\frac{1}{9}\right)^y+\left(\frac{4}{9}\right)^y+\left(\frac{8}{9}\right)^y$. Este injectivă, strict descrescătoare (exponenţiale cu baze subunitare) $\Rightarrow y=2$ este soluţie unică $\Rightarrow x=4$.

Bibliografie

[1] www.olimpiade şi concursuri

Colegiul Tehnic "C.D. Neniţescu" Piteşti
marin.veronica@yahoo.com

MATEMATICA: IPOTEZE ŞI CONCLUZII
Workshop, A III-a ediţie, 11 decembrie 2021, pg. 27-34

Reprezentarea grafică a curbelor plane

Oana-Maria MIU, Livia-Georgiana PUZDREA

1 Preliminarii

Reamintim Teorema funcţiilor implicite, necesară pentru studiul curbelor plane:

Teorema 1 (Teorema funcţiilor implicite) *Fie $F : U \times V \to \mathbb{R}^p$, unde $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^p$ deschise. Presupunem că F este de clasă C^1 pe $U \times V$. Fie $(x_0, y_0) \in U \times V$ pentru care sunt adevărate condiţiile:*
i) $F(x_0, y_0) = 0$
ii) matricea $J_{F,y}(x_0, y_0)$ este inversabilă.

Atunci există o vecinătate $U_1 \subset U$ a lui x_0 şi o vecinătate $V_1 \subset V$ a lui y_0 şi o unică funcţie $f : U_1 \to V_1$ astfel încât $f(x_0) = y_0$, şi $F(x, f(x)) = 0$.

Mai mult, f este de clasă C^1 şi $J_f(x) = -J_{F,y}(x, f(x))^{-1} \cdot J_{F,x}(x, f(x))$.

2 Drumuri şi curbe

Definiţia 1 *Se numeşte* **drum parametrizat** *în $\mathbb{R}^p$ orice funcţie continuă $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ definită pe un interval I al dreptei reale. Notând $\gamma(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t)), t \in I$, se spune atunci că este* **definită o reprezentare parametrică** *sau o* **parametrizare**

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ \vdots \\ x_p = f_p(t) \end{cases}, t \in I, \tag{1}$$

a drumului γ.

Definiţia 2 *Un drum parametrizat $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ pe un interval I al dreptei reale se numeşte* **neted** *(sau* **nesingular***) dacă γ este de clasă $C^1(I)$ şi $\gamma'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$; un drum $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ se numeşte bf neted pe porţiuni dacă el este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.*

Definiţia 3 *Două drumuri netede $\gamma : I \to \mathbb{R}^p, \gamma_1 : J \to \mathbb{R}^p$ definite pe intervalele I, J se numesc* **echivalente, cu aceeaşi orientare** *(şi se scrie $\gamma \sim \gamma_1$) dacă există o funcţie $\varphi : I \to J$ bijectivă, de clasă $C^1(I)$, strict crescătoare pe I, astfel încât φ^{-1} să aibă aceleaşi proprietăţi şi în plus, $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma$. Funcţia φ se mai numeşte* **schimbare de parametru***.*

2.1 Curbe plane

În secţiunea precedentă s-a dat definiţia unui drum neted ca şi noţiunea de echivalenţă a două drumuri netede; se verifică imediat că această relaţie pe mulţimea drumurilor netede este o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 4 *1. Se numeşte* **curbă plană parametrizată de clasă** C^1 *orice clasă de echivalenţă a unui drum neted* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$.

2. Mulţimea (γ) *se numeşte* **urma curbei**.

3. Pentru orice punct $P \in (\gamma)$, *se numeşte* **multiplicitatea lui** P *numărul acelor valori distincte ale lui* t *pentru care* $\gamma(t) = P$.

3 Reprezentarea grafică a curbelor

3.1 Reprezentări grafice

Fie $\mathbb{R}^2$ spaţiul euclidian real cu două dimensiuni (planul euclidian). Se notează cu litera x prima coordonată sau abscisa, iar cu litera y a doua coordonată sau ordonata, ale unui punct din $\mathbb{R}^2$. Cu suport geometric al lui $\mathbb{R}^2$ se consideră un plan π în care s-a dat un sistem ortogonal de axe carteziene Ox şi Oy (sinistrorsum), O fiind originea comună a celor două axe. Spaţiul $\mathbb{R}^2$ se va considera pus cu planul π în corespondenţă biunivocă prin aplicaţia care face ca fiecărui punct (x, y) din $\mathbb{R}^2$ să-i corespundă punctul P din planul π care are proiecţia x pe axa Ox şi proiecţia y pe axa Oy.

Construcţiile grafice vor fi executate în planul π.

Fie I o mulţime de puncte de pe dreapta reală şi două funcţii f şi g, definite pe I cu valori reale. Se va numi reprezentare parametrică, perechea ordonată de funcţii $r = (f, g)$. Punctele mulţimii I vor fi numite parametri.

3.2 Construcţia imaginii unei reprezentări parametrice în coordonate carteziene

Se dă o reprezentare parametrică r definită de funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$. r este o reprezentare parametrică în coordonate carteziene dacă, pentru fiecare $t \in I$, $f(t)$ este abscisa şi $g(t)$ este ordonata unui punct din plan; se notează în acest caz reprezentarea după cum urmează:

$$r : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

Se numeşte imagine a reprezentării parametrice r, mulţimea din plan

$$I(r) = \{(f(t),\, g(t));\; t \in I\}.$$

În continuare, mulţimea I va fi cel mult o reuniune finită de intervale, compacte sau nu, disjuncte două câte două.

Pentru a construi imaginea unei reprezentări parametrice, este necesar să se cunoască următoarele elemente:

I. **Punctele în care imaginea intersectează axele de coordonate.** Pentru aceasta se vor rezolva ecuaţiile $f(t) = 0$ şi $g(t) = 0$.

II. **Derivatele de ordinul întâi.**

1. Se calculează derivatele f' şi g'.
2. Se rezolvă ecuaţiile $f'(t) = 0$ şi $g'(t) = 0$.
3. În punctele în care $f'(t) \neq 0$ se calculează derivata $\frac{dg}{df}$.
4. Se determină intervalele în care f', g' şi $\frac{dg}{df}$ păstrează semn constant. Dacă $f' > 0$ ($f' < 0$) pe un astfel de interval, atunci f este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe el;
5. Se calculează limitele la dreapta şi la stânga ale lui $\frac{dg}{df}$ în toate punctele în care $f'(t) = 0$; ele dau informaţii asupra tangentei la $I(r)$.

III. **Derivatele de ordinul al doilea:**

1. Se calculează derivatele de ordinul al doilea f'', g'' şi $\frac{d^2g}{df^2}$.
2. Se rezolvă ecuaţia $\frac{d^2g(t)}{df^2(t)} = 0$. Punctele în care această derivată se anulează şi îşi schimbă semnul sunt puncte de infelxiune.
3. Se determină intervalele în care $\frac{d^2g(t)}{df^2(t)} = 0$ păstreză semn constant. Dacă

$$\frac{d^2g}{df^2} > 0 \qquad \left(\frac{d^2g}{df^2} < 0\right)$$

pe un astfel de interval, atunci $I(r)$ este convexă (concavă).

IV. **Asimptote.** Pentru a caracteriza asimptotele se va nota cu I' mulţimea punctelor de acumulare ale lui I în dreapta completată $\overline{\mathbb{R}}$.

Menţionăm că simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ pot să aparţină lui I'.

1. Se determină asimptotele verticale. Dreapta $x = k$, unde $k \in \mathbb{R}$ este o constantă, este asimptota verticală la $I(r)$ dacă există un punct $t_0 \in I'$ astfel încât cel puţin una din următoarele două condiţii să fie îndeplinită:

$$\alpha) \lim_{t \to t_0+0} f(t) = k \text{ şi } \lim_{t \to t_0+0} g(t) = +\infty \text{ sau } -\infty$$

$$\beta) \lim_{t \to t_0-0} f(t) = k \text{ şi } \lim_{t \to t_0-0} g(t) = +\infty \text{ sau } -\infty$$

În cazul (α) se spune că dreapta $x = k$ este asimptotă verticală la ramura spre $t_0 + 0$ a lui $I(r)$. În cazul (β) se spune că dreapta $x = k$ este asimptotă verticală la ramura spre $t_0 - 0$ a lui $I(r)$.

2. Se determină asimptotele oblice. $I(r)$ poate să aibă asimptotă oblică numai dacă există un punct $t_0 \in I'$ astfel încât cel puţin una din următoarele două condiţii să fie îndeplinită:

$$\alpha) \lim_{t \to t_0+0} f(t) = +\infty \text{ sau } -\infty$$

$$\beta) \lim_{t \to t_0-0} f(t) = +\infty \text{ sau } -\infty$$

În cazul (α), dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $I(r)$ dacă şi numai dacă există şi sunt finite următoarele limite

$$m = \lim_{t \to t_0+0} \frac{g(t)}{f(t)} \text{ şi } n = \lim_{t \to t_0+0} (g(t) - mf(t)).$$

Se va spune că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la ramura spre $t_0 + 0$ a lui $I(r)$.

În cazul (β), dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică la $I(r)$ dacă şi numai dacă există şi sunt finite următoarele limite

$$m' = \lim_{t \to t_0 - 0} \frac{g(t)}{f(t)} \text{ şi } n' = \lim_{t \to t_0 - 0} (g(t) - m'f(t)).$$

Se va spune că dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică la ramura spre $t_0 - 0$ a lui $I(r)$.

V. **Tabloul.** Într-un tablou cu rubrici orizontale trecem:

-în rubrica întâi, valorile importante ale lui t obţinute anterior;

-în rubrica a doua, valorile corespunzătoare precum şi semnul, ale lui f';

-în rubrica a treia, valorile corespunzătoare precum şi semnul, ale lui g';

-în rubrica a patra, valorile corespunzătoare precum şi semnul, ale lui $\frac{dg}{df}$;

-în rubrica a cincea, radacinile precum şi semnul, ale lui $\frac{d^2g}{df^2}$;

-în rubrica a şasea, valorile corespunzătoare precum şi săgeţile care indică creşterea sau descreşterea, pentru f;

-în rubrica a şaptea, valorile corespunzătoare precum şi săgeţile care indică creşterea sau descreşterea, pentru g;

3.3 Construcţia imaginii unei reprezentări parametrice în coordonate polare

Definiţia 5 *Se numesc* **coordonate polare ale punctului** $P(x, y) \neq (0, 0)$, *mărimile* ρ *şi* θ, *unde* ρ *este lungimea segmentului* OP *şi* θ *este măsura în radiani determinată în afara unui multiplu de* 2π *– a unghiului de care trebuie rotită semiaxa pozitivă* Ox *în sens trigonometric direct pentru a coincide cu semidreapta* OP. ρ *este* **raza polară**, *iar* θ *este* **unghiul polar** *sau* **argumentul polar, ale punctului** P. *Semiaxa pozitivă* Ox *se numeşte* **polul sistemului de coordonate polare** ρ, θ.

În aplicaţii se întâlnesc frecvent două cazuri particulare de reprezentări parametrice în coordonate polare; pentru aceasta vom face notaţii semnificate.

Reprezentarea

$$r' : \begin{cases} \rho = \varphi(t) \\ \theta = t \end{cases}, \ t \in I,$$

va fi notată

$$r' : \rho = \varphi(\theta), \ \theta \in I.$$

Reprezentarea

$$r'' : \begin{cases} \rho = t \\ \theta = \psi(t) \end{cases}, \ t \in I,$$

va fi notată

$$r'' : \theta = \psi(\rho), \rho \in I$$

.

Au loc următoarele relaţii între coordonatele carteziene şi polare ale lui P:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}; \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2k\pi, \ \text{dacă } y \geq 0, \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2k\pi, \ \text{dacă } y \leq 0, \end{cases} \end{cases}$$

unde k parcurge mulţimea numerelor întregi. Se observă că θ nu este unic determinat; diversele argumente θ ale lui P diferă între ele printr-un multiplu întreg de 2π. Coordonata polară ρ este totdeauna pozitivă.

Fie r o reprezentare parametrică definită de funcţiile $f, g : I \to R$. Se va spune că r este o reprezentare parametrică în coordonate polare dacă, pentru fiecare $t \in I, f(t)$ este coordonata ρ şi $g(t)$ este coordonata θ, ale unui punct din plan; se va nota în acest caz reprezentarea în felul următor:

$$r : \begin{cases} \rho = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases}, \ t \in I.$$

Evident, trebuie să avem $f \geq 0$ pe I. Se va numi imagine a reprezentării parametrice r, mulţimea din plan

$$I(r) = \{(f(t)\cos g(t), f(t)\sin g(t));\ t \in I\}.$$

Pentru a construi imaginea unei reprezentări parametrice, este necesar să se cunoască următoarele elemente:

I. **Punctele în care graficul intersectează axele de coordonate.** Pentru aceasta se vor rezolva ecuaţiile $g(t) = \frac{k\pi}{2}(k = ..., -1, 0, 1...)$.

II. **Derivatele de ordinul întâi.**

1°. Se calculează derivatele f' şi g'.

2°. Se rezolvă ecuaţiile $f'(t) = 0$ şi $g'(t) = 0$.

3°. În punctele în care $g'(t) \neq 0$ se calculează derivata $\frac{df}{dg}$.

4°. Se determină intervalele în care f', g' şi $\frac{df}{dt}$ păstrează semn constant.

III. **Asimptotele şi cercurile asimptotice.**

IV. **Tabloul.** Într-un tablou cu rubrici orizontale se trec:

-în rubrica întâi, valorile importante ale lui t, obţinute anterior;

-în rubrica a doua, valorile corespunzătoare precum şi semnul, ale lui f';

-în rubrica a treia, valorile corespunzătoare precum şi semnul, ale lui g';

-în rubrica a patra, valorile corespunzătoare precum şi semnul, ale lui $\frac{df}{dg}$;

-în rubrica a cincea, valorile corespunzătoare precum şi săgeţile care indică creşterea sau descreşterea, ale lui f;

-în rubrica a şasea, valorile corespunzătoare precum şi săgeţile care indică creşterea sau descreşterea, ale lui g.

3.4 Reprezentări parametrice în coordonate carteziene

Exemplu. $r : \begin{cases} x = 5t - t^5 \\ y = 2t^2 - t^4 \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

I. Se rezolvă ecuaţiile $5t - t^5 = 0$ şi $2t^2 - t^4 = 0$ şi se obţin rădăcinile $t = 0, t = \pm\sqrt{2}, t = \pm\sqrt[4]{5}$. Se deduce că imaginea lui r taie axa Ox în punctele $x = 0$ şi $x = \pm\sqrt{2}$, iar axa Oy în punctele $y = 0$ şi $y = 2\sqrt{5} - 5$.

II. Derivatele de ordinul întâi sunt

$$x'(t) = 5(1 - t^4),$$

$$y'(t) = 4t(1 - t^2).$$

Derivata $x'(t)$ se anulează pentru $t = \pm 1$; $x'(t) > 0$ pentru $t \in (-1, 1)$ şi $x'(t) < 0$ pentru $t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Derivata $y'(t)$ se anulează pentru $t = 0$ şi $t = \pm 1$; $y'(t) > 0$ pentru $t \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ şi $y'(t) < 0$ pentru $t \in (= 1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Pentru $t \neq \pm 1$ se calculează

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{4}{5} \cdot \frac{t}{1 + t^2}.$$

3.5 Reprezentări parametrice în coordonate carteziene

Semnul acestei derivate este semnul lui t. Limita la dreapta şi limita la stânga, în punctul $t = -1$, sunt egale cu $-\frac{2}{5}$. De asemenea limitele la dreapta şi la stânga, în punctul $t = 1$, sunt egale cu $\frac{2}{5}$.

III. Derivatele de ordinul al doilea sunt:

$$x''(t) = -20t^3$$

$$y''(t) = 4(1 - 3t^2).$$

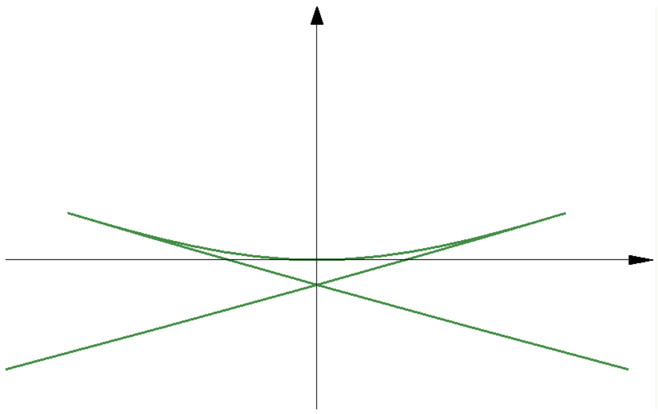
Pentru $t \neq \pm 1$ se calculează

$$\frac{d^2y(t)}{dx^2(t)} = \frac{4}{25} \cdot \frac{t}{(1 + t^2)^3}.$$

Această derivată nu se anulează şi este pozitivă peste tot, deci imaginea lui r este convexă şi nu are puncte de inflexiune.

3.6 Reprezentări parametrice în coordonate carteziene

Imaginea reprezentării parametrice



3.7 Reprezentări parametrice în coordonate carteziene

IV. Nu există asimptote.

V. Se trec rezultatele obţinute, în următorul tablou

t	$-\infty$	$-\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{5}$	$+\infty$
$x'(t)$		$- - - - - - - - -$		0	$+ + ++$	0		$- - - - - - - - -$	
$y'(t)$		$+ + + + + + + + +$		0	$- \; 0 \; +$	0		$- - - - - - - - -$	
$\frac{dy(t)}{dx(t)}$		$- - - - - - - - - - - \frac{2}{5}$		$\vert$	$-\frac{2}{5} \; - \; 0 \; + \frac{2}{5}$	$\vert$		$\frac{2}{5} + + + + + + + + +$	
$\frac{d^2y(t)}{dx^2(t)}$		$+ + + + + + + + +$		$\vert$	$+ + +$	$\vert$		$+ + + + + + + + +$	
$x(t)$	$+\infty \searrow$	$0 \searrow$	$-\sqrt{2} \searrow$	-4	$\nearrow 0 \nearrow$	4	$\searrow \sqrt{2} \searrow$	0	$\searrow -\infty$
$y(t)$	$-\infty \nearrow$	$2\sqrt{5}-5 \nearrow$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0 \nearrow$	1	$\searrow 0 \searrow$	$2\sqrt{5}-5$	$\searrow -\infty$

3.8 Reprezentări parametrice în coordonate polare

Exemplu. $\rho = e^{k\theta}$, $k > 0$ (Spirala logaritmică).
Domeniul de definiţie este intervalul $(-\infty, \infty)$. Derivata $\rho'(\theta) = ke^{k\theta}$ este pozitivă oricare ar fi θ, deci funcţie ρ este strict crescătoare. Avem $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = 0$, deci originea este un punct asimptotic. Avem de asemenea $\lim\limits_{\theta \to \infty} \rho(\theta) = +\infty$. Graficul se bucură de proprietatea că unghiul format într-un punct $M(\theta)$ de pe grafic, între semidreapta OM şi tangenta la grafic, este constant. Acest lucru rezultă din relaţia

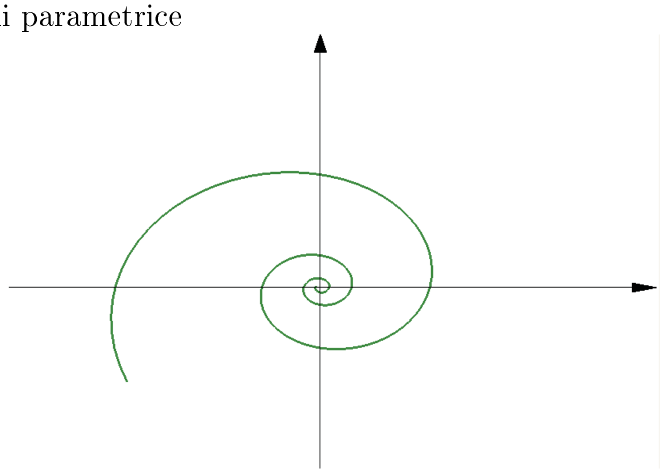
$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1}{k}.$$

Pentru a construi imaginea reprezentării parametrice, vom alcătui un tablou în care vom trece câteva puncte de intersecţie cu axele de coordonate.

θ	$-\infty...$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdot$	$+\infty$
$\rho'(\theta)$			+ + + + + + + + + + + + + +							
$\rho(\theta)$	$0...$	$\nearrow e^{-k\frac{3\pi}{2}} \nearrow$	$e^{-k\pi} \nearrow$	$e^{-k\frac{\pi}{2}} \nearrow$	$1 \nearrow$	$e^{k\frac{\pi}{2}} \nearrow$	$e^{k\pi} \nearrow$	$e^{k\frac{3\pi}{2}} \nearrow$	$\cdot$	$+\infty$

3.9 Reprezentări parametrice în coordonate polare

Imaginea reprezentării parametrice



Bibliografie

[1] Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, vol.III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[2] C. Meghea, *Bazele analizei matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977.

[3] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, vol.1, 1963, vol.2, 1964.

[4] D. Nuică, A. Nuică, *Analiză matematică. Curs şi aplicaţii. Partea a a II-a*, Editura Tiparg, 2019.

[5] O. Stănăşilă, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

COLEGIUL ECOLOGIC "PROF.UNIV.DR ALEXANDRU IONESCU", PITEŞTI
oanamiu143@yahoo.com

UNIVERSITATEA DIN PITEŞTI
livia.puzdrea@upit.ro

MATEMATICA: IPOTEZE ŞI CONCLUZII
Workshop, A III-a ediţie, 11 decembrie 2021, pg. 35-47

Formulele lui Newton şi unele aplicaţii ale lor în rezolvarea unor probleme de tip admitere

Sorin ULMEANU

În diverse culegeri de probleme şi la diferite examene de admitere în înăţământul superior au apărut probleme de tipul:

1) Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $x^3 - x - a = 0$ verifică inegalitatea:

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \geq x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$$

Admitere 1986, profil electric

2) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $X^3 + pX + q \in \mathbb{Z}[x]$. Pentru $k \in \mathbb{N}$ se notează $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$.

i) Calculaţi S_k în funcţie de p şi q pentru $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

ii) Demonstraţi $S_k \in \mathbb{Z}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Admitere 1994, Facultatea de Matematică, Bucureşti

3) Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Se cere mulţimea:

$$\left\{x_1^n + x_2^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Admitere 1996, A.S.E. - Cibernetică, Bucureşti

4) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi ecuaţia $x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + (n-1)x^2 + nx + (n+1) = 0$.

i) Să se arate că nu toate soluţiile ecuaţiei sunt reale.

ii) Dacă $n \geq 10$, să se calculeze suma $S = x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei date.

iii) Notând $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $S_n = -2$.

***

5) Să se afle $x, y, z \in \mathbb{Z}_7$ ştiind că $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = \hat{1}$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = \hat{2}$.

***

6) Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_7$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^7 - 1 = 0$, să se calculeze suma

$$\sum_{i \neq j} (x_i + x_j)^{20}.$$

L. Panaitopol, I.C. Drăghicescu - Polinoame şi ecuaţii algebrice

7) Fără a calcula determinantul, să se calculeze coeficienţii polinomului

$$D_A(X) = \det(XI_4 - A), \text{unde } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sorin Ulmeanu

În prezenta notă vom demonstra întâi formulele lui Newton şi pornind de la ele vom prezenta câteva aplicaţii ale lor (unele neaşteptate) la rezolvarea teoretică şi practică (cu ajutorul calculatorului) a câtorva probleme de algebră elementară, urmând ca în final să soluţionăm problemele mai sus menţionate.

1 Formulele lui Newton

Acestea au apărut din necesitatea de a calcula sume de puteri de forma $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, sume care sunt întâlnite în diferite aplicaţii, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile polinomului $X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$.

Pentru ca expunerea să fie accesibilă şi elevilor din clasele a IX-a şi a X-a de liceu, să notăm prin $K[X]$ mulţimea polinoamelor în nedeterminata X şi cu coeficienc ti în K, unde K este una dintre mulţimile $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Pentru început vom prezenta noţiunea de derivată (formală) a unui polinom.

Definim funcţia $d : K[X] \to K[X]$ astfel: dacă $a \in K$, atunci $d(a) = 0$, iar dacă $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ şi grad$(f) \geq 1$, atunci $d(f) = na_0X^{n-1} + (n-1)a_1X^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}X + a_{n-1}$.

Funcţia d se numeşte *derivare*, iar dacă $f \in K[X]$ este un polinom, atunci $d(f)$ se numeşte *derivata* (*formală*) lui f şi se va nota cu f'.

Exemplul 1 *Dacă $f, g \in \mathbb{R}[X]$. iar $h \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX + b$, $g = aX^2 + bX + c$, iar $h = (1 + i)X^4 + iX^2 + 3X + 1$, atunci derivatele polinoamelor f, g, respectiv h vor avea forma: $f' = a$, $g' = 2aX + b$, $h' = 4(1 + i)X^3 + 2iX + 3$.*

Ţinând cont de definiţia derivării obţinem imediat proprietăţile (verificarea lor se face prin calcul):

1. $a' = 0, \forall a \in K$; derivata oricărei constante este 0.

2. $(X^n)' = nX^{n-1}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.

3. $(aX^n)' = naX^{n-1}, (\forall a \in K)$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.
4. $(af)' = af'$, $(\forall a \in K)$, $(\forall f \in K[X])$ – constantele din K ies în afara derivării.
5. $(X^{i+j})' = (i+j)X^{i+j-1} = (iX^{i-1})(X^j) + (X^i)(jX^{j-1})$, deci $(X^{i+j})' = (X^i)'X^j + X^i(X^j)'$, $(\forall i, j \in \mathbb{N})$.
6. $(f+g)' = f' + g'$, $(\forall f, g \in K[X])$ – derivata sumei a două polinoame este egală cu suma derivatelor celor două polinoame.
7. $(fg)' = f'g + fg'$, $(\forall f, g \in K[X])$ – regula de derivare a produsului.
8. Prin inducție completă după $n \in \mathbb{N}^\star$ se poate arăta că dacă $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n \in K[X]$, atunci $(f_1 f_2 f_3 \cdots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 f_3 \cdots f_{n-1} f_n'$.

Lema 1 *Fie polinomul $P_n \in K[X]$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, unde $P_n = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile lui P, atunci*

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(X)}{X - x_k}.$$

Demonstrație. Știm $P_n = (X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$. Din proprietatea (8) obținem

$$P_n' = (X - x_2)(X - x_3)\cdots(X - x_n) + (X - x_1)(X - x_3)\cdots(X - x_n) + \cdots +$$

$$(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X - x_1)\cdots(X - X_n)}{X - x_k} \Rightarrow P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(X)}{X - x_k}.$$

Lema 2 *În ipotezele Lemei 1 avem:*

$P_n' = nX^{n-1} + (S_1 + na_1)X^{n-2} + (S_2 + a_1 S_1 + na_2)X^{n-3} + \cdots + (S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \cdots + na_{n-1})$,

unde $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Cum

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(X)}{X - x_k}, \tag{1}$$

împărțind cu rest pe P_n la $X - x_k$ prin schema lui Horner obținem

$$P_n = (X - x_k)\left[X^{n-1} + (x_k + a_1)X^{n-2} + (x_k^2 + a_1 x_k + a_2)X^{n-3} + \cdots +\right.$$

$$\left.(x_k^{n-1} + a_1 x_k^{n-2} + \cdots + a_{n-1})\right]$$

și de aici expresia polinomului $\dfrac{P_n}{X - x_k}$.

Folosind (1) și expresiaq lui S_k, prin sumare de la 1 la n, obținem:

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} \left[X^{n-1} + (x_k + a_1)X^{n-2} + (x_k^2 + a_1 x_k + a_2)X^{n-3} + \cdots +\right.$$

$$\left.(x_k^{n-1} + a_1 x_k^{n-2} + \cdots + a_{n-1})\right] \Rightarrow$$

$$P_n' = nX^{n-1} + (S_1 + na_1)X^{n-2} + (S_2 + a_1 S_1 + na_2)X^{n-3} + \cdots + (S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \cdots + na_{n-1}).$$

Lema 3 *În ipotezele Lemei 1 avem:*

$$P_n' = nX^{n-1} + (n-1)a_1X^{n-2} + \cdots + a_{n-2}X + a_{n-1}.$$

Demonstrație. Evident, din defini'ia derivatei unui polinom.

Teorema 2 *Fie polinomul de grad $n \geq 1$, $P_n \in K[X]$, $P_n = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$, unde $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ și sumele $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Atunci au loc formulele lui Newton:*

$$S_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i S_{k-i} = -ka_k,\ k = \overline{1, n-1}$$

sau altfel spus:

$$\begin{cases} S_1 = -a_1 \\ S_2 + a_1S_1 = -2a_2 \\ S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 = -3a_3 \\ \cdots \\ S_{n-1} + a_1S_{n-2} + \cdots + a_{n-2}S_1 = -(n-1)a_{n-1} \end{cases}.$$

Demonstrație. Din Lema 2 și Lema 3, folosind egalitatea a două polinoame în nedeterminata X obținem, egalând cele două forme ale lui P_n', egalitățile:

$$\begin{cases} S_1 + na_1 = (n-1)a_1 \\ S_2 + a_1S_1 + na_2 = (n-2)a_2 \\ S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + na_3 = (n-3)a_3 \\ \cdots \\ S_{n-1} + a_1S_{n-2} + \cdots + a_{n-2}S_1 + na_{n-1} = a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S_1 = -a_1 \\ S_2 + a_1S_1 = -2a_2 \\ S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 = -3a_3 \\ \cdots \\ S_{n-1} + a_1S_{n-2} + \cdots + a_{n-2}S_1 = -(n-1)a_{n-1} \end{cases},$$

adică tocmai formulele lui Newton.

Observaţia 1 *Formulele lui Newton rezolvă problema calculului sumelor de puteri $S_k = \sum_{i=1}^k x_i^k$ numai pentru $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, o astfel de sumă calculându-se evident numai în funcție de coeficienții polinomului și de sumele precedente.*

Calculul sumelor pentru indicii $k \geq n$ se face pe baza următoarei:

Consecinţa 1 *În ipotezele teoremei precedente avem egalitatea, valabilă pentru orice $p \in \mathbb{N}$:*

$$S_{n+p} + a_1S_{n+p-1} + a_2S_{n+p-2} + \cdots + a_nS_n = 0,$$

egaliate care împreună cu teorema rezolvă complet calculul sumelor de tip S_k, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Din x_k, $k=\overline{1,n}$, rădăcină a lui P_n obținem

$$x_k^n + a_1 x_k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_k + a_n = 0, k=\overline{1,n} \Rightarrow$$

$$x_k^{n+p} + a_1 x_k^{n+p-1} + \cdots + a_{n-1}x_k^{p+1} + a_n x^p = 0, k=\overline{1,n},$$

de unde prin sumare de la 1 la n obținem egalitatea cerută.

Să observăm că ideea de demonstrație a consecin'ei se află în manualul de algebră de clasa a XII-a, la paragraful despre relațiile lui Viète.

Observaţia 2 *Din formulele lui Newton s-a obținut $S_1 = -a_1$, $S_2 = a_1^2 - 2a_2$, relații care puteau fi obținute direct numai cu relațiile lui Viète.*

În general calculul sumelor S_k, $k \in \mathbb{N}$, se poate efectua folosind numai relațiile lui Viète, dar calculul este mai lung ții uneori face apel la unele identități lungi, a căror reținere nu este recomandabilă. În acest sens metoda prezentată mai sus este algorimică și, deși lipsită de spectaculozitate, este sigură și directă.

De exemplu, recomandăm cititorului să încerce calculul prin ambele metode al lui S_7, unde x_i, $i=\overline{1,9}$ sunt soluțiile ecuației:

$$x^9 - x^8 + 2x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x + 1 = 0.$$

Observaţia 3 *Când polinomul cu care lucrăm este de grad 3 și trebuie calculate sume de tip S_k, sunt utile și următoarele identități din care doar prima este mai cunoscută:*

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

$$a^4+b^4+c^4 = (a+b+c)^4 + 2(ab+bc+ca)^2 + 4abc(a+b+c) - 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$a^5+b^5+c^5 = \frac{1}{6}\left[6(a+b+c)^5 + 5(a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2)(a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3)\right]$$

2 Aplicații

Aplicaţia 1 *Să se calculeze suma $S = \sum\limits_{i\neq j} x_i^3 x_j^4$, unde x_i, x_j sunt rădăcini ale ecuației*

$$x^3 - 3x + 5 = 0.$$

Soluție. Vom considera problema mai generală, de a calcula suma

$$\sum_{i\neq j} x_i^p x_j^q, p, q \in \mathbb{N},$$

unde x_i, x_j sunt rădăcini ale polinomului

$$P_n = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n, \quad i,j \in \{1,2,3,\ldots,n\}, i \neq j, P_n \in \mathbb{C}[X].$$

Fie sumele $S_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$ și $S_q = \sum_{j=1}^{n} x_j^q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Atunci

$$S_pS_q = (x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p)(x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i^p x_j^q \Rightarrow$$

$$S_pS_q = S_{p+q} + S \Rightarrow S = S_pS_q - S_{p+q}.$$

Revenind la exercițiu $p = 3$, $q = 4$ și $S = S_3S_4 - S_7$. Folosind formulele lui Newton vom obține:

$$S_1 = -a_1 = 0; S_2 = -2a_2 = 6; S_3 = -a_1S_2 - a_2S_1 - 3a_3 = -15; S_4 = 18;$$

$$S_5 = 3S_3 - 5S_2 = -75; S_7 = 3S_5 - 5S_4 = -315 \Rightarrow S = 45.$$

Aplicaţia 2 *Să se calculeze suma*

$$\sum_{\substack{i\neq j \\ j\neq k \\ k\neq i}} x_i^3 x_j^2 x_k^1$$

unde x_i, x_j, x_k *sunt rădăcini ale euației* $x^5 - 3x^2 + x + 1 = 0$.

Soluție. Procedând analog ca la Aplicația 1, calculând suma $\sum_{\substack{i\neq j \\ j\neq k \\ k\neq i}} x_i^p x_j^q x_k^r$ vom obține:

$$S = S_pS_qS_r - S_{p+q}S_r - S_{p+r}S_q - S_{q+r}S_p + 2S_{p+q+r}, \quad p, q, r \in \mathbb{N}.$$

Revenind vom obține

$$S = S_3S_2S_1 - S_5S_1 - S_4S_2 - S_3S_3 + 2S_6.$$

Din formulele lui Newton avem:

$$S_1 = 0; S_2 = 0; S_3 = 9; S_4 = -4; S_5 = -3; S_6 = 3S_3 - S_2 - S_1 = 27 \Rightarrow S = -27.$$

Aplicaţia 3 Metoda Léverrier *de determinare a coeficienților polinomului caracteristic asociat unei matrice pătratice* $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Pentru a face rezultatele prezentate mai accesibile vom da câteva definiții și teoreme a căror demonstrare nu face obiectul expunerii.

Definiţia 6 *Fie* $A \in M_n(\mathbb{C})$. *Matricea* $A - XI_n$ *se numește matrice caracteristică a lui* A *iar determinantul* $\det(A - XI_n)$ *se numește polinomul caracteristic al lui* A *(fiind un polinom de grad* n *în nedeterminata* X*) și se mai notează* P_n.

Definiţia 7 *Zerourile polinomului caracteristic al unei matrice* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *se numesc* valorile proprii *ale matricei* A.

Definiţia 8 *Fie* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *și* $\lambda \in \mathbb{C}$ *o valoare proprie a lui* A*. Matricea (vectorului cu* n *componente)* $u \in M_{1,n}(\mathbb{C}), u \neq O_{1,n}$ *se numește vector propriu al matricei* A *corespunzător valorii proprii* λ *dacă* $Au = u\lambda$ *(i.e ecuația* $Au = u\lambda$ *are soluții nebanale).*

Exemplul 2 *Dacă* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$*, atunci polinomul caracteristic al lui* $\det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = X^2 - 4X + 3$ *iar* $\lambda_1 = 1$ *și* $\lambda_2 = 3$ *sunt valorile proprii ale lui* A*.*

Rezolvând ecuațiile $Au = u\lambda_1$ *și* $Au = u\lambda_2$ *vom găsi că* $u_1 = (1 \;\; -1)$ *și* $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii* λ_1*, respectiv* λ_2*.*

Propoziţia 1 *Dacă* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ *sunt valorile proprii ale matricei* $A \in M_n(\mathbb{C})$*, atunci* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A)$ *(i.e urma matricei* A*) și* $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_n = \det(A)$*.*

Propoziţia 2 *Dacă* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ *sunt valorile proprii ale matricei* $A \in M_n(\mathbb{C})$*, atunci* $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \lambda_3^p, \ldots, \lambda_n^p$ *sunt valorile proprii ale lui* A^p*,* $p \in \mathbb{N}$*.*

Propoziţia 3 *Dacă* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ *sunt valorile proprii ale matricei* $A \in M_n(\mathbb{C})$*, atunci* $\lambda_1^{-p}, \lambda_2^{-p}, \lambda_3^{-p}, \ldots, \lambda_n^{-p}$ *sunt valorile proprii ale lui* A^{-p}*,* $p \in \mathbb{N}$*.*

Propoziţia 4 (Teorema Hamilton-Cayley) *Orice matrice* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *este rădăcină a polinomului său caracteristic.*

2.1 Prezentarea metodei

Metoda Léverrier determină coeficienții polinomului caracteristic al unei matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ folosind numai elementele matricei A și formulele lui Newton.

Pentru simplitate vom considera polinomul

$$D_n = (-1)^n P_n = \det(XA - I_n) = X^n + p_1 X^{n-1} + \cdots + p_{n-1}X + p_n.$$

Este clar că a și coeficienții lui P_n este totuna cu a ști coeficienții lui D_n.

Notând cu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii ale lui $A \in M_n(\mathbb{C})$, atunci sumele de tipul $S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$, $k = \overline{1,n}$ se vor calcula pornind de la faptul că $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \ldots, \lambda_n^k$ sunt valorile proprii ale matricei A^k, $k = \overline{1,n}$ (din Propozițiile 1 și 2) și folosind apoi încă o dată Propoziția 1 vom obține:

$$S_k = \mathrm{Tr}(A^k), \quad k = \overline{1,n}.$$

Din formulele lui Newton

$$S_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_i S_{k-i} = -kp_k, \quad k = \overline{1,n}, \quad S_1 = -p_1$$

obținem

$$p_1 = -S_1, \quad p_k = -\frac{1}{k}\left(S_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_i S_{k-i}\right), \quad k = \overline{2,n}.$$

Observaţia 4 *Metoda prezentată reclamă calculul succesiv al puterilor A, A^2, …, A^n ale matricei A, numărul de calcule necesare fiind foarte mare. De aceea se recomandă aplicarea metodei pentru matrice A de formă "rară", adică $a_{ij} = 0$ pentru aproape toți indicii $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Exemplul 3 *Să se calculeze (prin metoda Léverrier) coeficienții polinomului*

$$D_A = \det(XI_6 - A),$$

unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluție.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 21 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 59 & 0 & 42 & -19 \\ 4 & 1 & 8 & -2 \\ 20 & 0 & 61 & -10 \\ 38 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; A^4 = \begin{pmatrix} 441 & 0 & 160 & -40 \\ 80 & 1 & 16 & 0 \\ 800 & 0 & 481 & -200 \\ 80 & 0 & 80 & -39 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S_1 = \mathrm{Tr}(A) = 2; S_2 = \mathrm{Tr}(A^2) = 40; S_3 = 122; S_4 = 884 \Rightarrow$ (Formulele lui Newton) $\Rightarrow p_1 = -S_1 = -2; p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1S_1) = -18 \Rightarrow p_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + p_1S_2 + p_2S_1) = -2 \Rightarrow p_4 = -\frac{1}{4}(S_4 + p_1S_3 + p_2S_2 + p_3S_1) = 21.$

Observaţia 5 *Metoda prezentată mai sus se poate implementa pe calculator. Iată cum arată programul în limbajul C++:*

```
#include <iostream.h>
#include <conio.h>
float a[10][10], b[10][10], p[10], s[10];
int n;
void citire()
{
   cout<<"n="; cin>>n;
   for (int i=0; i<n; i++)
      {
         for(int j=0; j<n; j++)
            {
               cout<<"a("<<i<<","<<j<<")=";
               cin>>a[i][j];
            }
      }
   int j;
   for(i=0; i<n; i++)
      for(j=0; j<n; j++)
         b[i][j]=c[i][j];
```

```
    s[k]=0;
    for(i=0; i<n; i++)
        s[k]+=b[i][i];
    p[k]=0;
    for(i=0; i<n; i++)
        p[k]+=p[i]*s[k-i];
    p[k]=-1.0/k*p[k];
    cout<<"p"<<k<<"="<<p[k]<<endl;
    cout<<"s"<<k<<"="<<s[k]<<endl;
    if(k<n) pk(k+1);
    return;
}
void afis()
{
    for(i=0; i<=n; i++)
    cout<<"p"<<i<<"="<<p[i]<<endl;
}
void main()
{
    clrscr();
    cit();
    for(i=0; i<n; i++)
        b[i][i]=1;
    s[0]=n; p[0]=1;
    pk(1);
    afis();
    getch();
}
```

Aplicaţia 4 *Calculul inversei unei matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversabilă, prin metoda Léverrier.*

Dată $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversabilă, să considerăm polinomul său caracteristic $D_n = \det(XI_n - A) = X^n + p_1 X^{n-1} + \cdots + p_{n-1}X + p_n$, a cărui formă o considerăm cunoscută (se poate determina fie direct fie prin metoda Léverrier).

Folosind teorema Hamilton-Cayley (Propoziția 4) obținem:

$$A^n + p_i A^{n-1} + \cdots + p_{n-1}A + p_n = 0_n \,\Big|\, A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{n-1} + p_1 A^{n-2} + \cdots + p_{n-1}I_n + p_n A^{-1} = 0_n \,\Big|\, A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{p_n}\left(A^{n-1} + p_1 A^{n-2} + \cdots + p_{n-1}I_n\right)$$

dacă $p_n \neq 0$ sau

$$A^{-1} = -\frac{1}{p_n}\left(A^{n-1} + p_1 A^{n-2} + \cdots + p_{r-1}A^{n-r+1}\right)$$

dacă există $r \leq n$ a.î $p_n = p_{n-1} = \cdots = p_r = 0$ și $p_{r-1} \neq 0$.

Exemplul 4 *Dacă* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *să se calculeze A^{-1} prin metoda Léverrier.*

Soluție. La Aplicația 3 s-a calculat polinomul caracteristic asociat lui A: $D_A = X^4 - 2X^3 - 18X^2 - 2X + 21$ și cum $\det A \neq 0$, $p_4 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{21}(A^3 + p_1A^2 + p_2A + p_3I_n) = -\dfrac{1}{21}(A^3 - 2A^2 + 18A - 2I_n)$.

Observaţia 6 *Programul de la Aplicația 3 poate fi îmbunătățit desigur, dar și ușor de modificat, adăugând cerința suplimentară ca la ieșire să apară și A^{-1}, dacă acesta este inversabilă (se va testa dacă $\det A \neq 0$), lucru pe care îl lăsăm ca exercițiu cititorilor pasionați de informatică.*

3 Rezolvarea problemelor propuse

Problema 1

Cu formulele lui Newton sau cu relațiile lui Viète obținem $S_1 = 0$; $S_2 = 1$. Folosind apoi consecința de la prezentarea formulelor lui Newton obținem:

$$S_3 = 3a; S_4 = S_2 + aS_1 = 1; S_5 = S_3 + aS_2 = 4a; S_6 = S_4 + aS_3 = 1 + 3a^2$$

Din ipoteză știm $S_6 \geq S_5 \Rightarrow 3a^2 - 4a + a \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, +\dfrac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$.

Problema 2

i) Din formulele lui Newton avem $S_0 = 3$; $S_1 = -a = 0$; $S_2 + a_1S_1 = -2a_2 \Rightarrow S_2 = -2p$. Folosind apoi consecința anterior menționată avem $S_3 = 3a$; $S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 = 0 \Rightarrow S_4 = -pS_2 - qS_1 = 2p^2$.

ii) Notăm cu P_n propoziția "$S_n \in \mathbb{Z}$" și vom demonstra prin inducție că $P(n)$ este adevărată $(\forall)n \in \mathbb{N}$, folosind varianta de inducție de tipul $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Din i) s-a arătat că $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, sunt adevărate $(p, q \in \mathbb{Z})$.

Pentru etapa a doua a inducției, folosim egalitatea $S_{k+1} = -pS_{k-1} - qS_{k-2}$ și cum $P(k-1)$ și $P(k-2)$ sunt adevărate obține, $S_{k+1} \in \mathbb{Z}$. Așadar $P(n)$ este adevărată $(\forall)n \in \mathbb{N}$ conform metodei inducției matematice, varianta a doua.

Problema 3

Soluția 1. (Cu formulele lui Newton) notăm S'_n suma din enunț. Se observă că x_1 și x_2 sunt rădăcinile complexe de ordinul 3 ale unității, avem că $S_{n+3} = S_n$ $(\forall)n \in \mathbb{N}$, din formulele lui Newton $\Rightarrow S_n \in \{S_0, S_1, S_2\} = \{3, 0, 0\}$ $(\forall)n \in \mathbb{N}$, de unde $S'_n \in \{2, -1\}$ $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

Soluția 2. (Numai cu Viète) Se observă că x_1 și x_2 satisfac $x_1^3 = x_2^3 = 1$, de unde dacă notăm cu S_n suma din enunț avem $S_{3n} = 2$ $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

Cum

$$S_{3n+1} = x_1^{3n}x_1 + x_2^{3n} + x_2 = x_1 + x_2 = 1\,(\forall)n \in \mathbb{N}$$

și

$$S_{3n+2} = x_1^{3n}x_1^2 + x_2^{3n} + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 - 2 = -1\,(\forall)n \in \mathbb{N}$$

și cum orice număr natural se scrie în mod unic sub una din formele $3n$, $3n+1$, $3n+2$, $n \in \mathbb{N}$ obține, $S_n \in \{-1, 2\}$.

Soluția 3. (Pentru amatorii de trigonometrie) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \pm i \sin\dfrac{2\pi}{3}$. Folosind formulele lui Moivre avem:

$$S_x = x_1^n + x_2^n = 2\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 & n = 3k \\ -1 & n = 3k+1 \\ -1 & n = 3k+2 \end{cases} \Rightarrow S_n \in \{-1, 2\}.$$

Problema 4

i) Calculând $S_2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -a_1 S_1 - 2a_2 = +4 - 2 \cdot 3 = -2 < 0$ sau $S_2 = (x_1 + \cdots + x_n)^2 - 2 \cdot (x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n) = -2 < 0$ se observă că nu toate soluțiile ecuației pot fi reale.

ii) Folosim formulele lui Newton:

$$S_1 = -2; S_2 = -2; S_3 = -a_1 S_2 - a_2 S_1 - 3a_3 = 4 + 6 - 12 = -2;$$

$$S_4 = -a_1 S_3 - a_2 S_2 - a_3 S_1 - 4a_4 = 4 - 3(-2) - 4(-2) - 20 = -2$$

și analog $S_5 = -2$.

Din i) și ii) s-a arătat că S_1, S_2, $\ldots$, $S_5 \in \mathbb{N}$. Fie $m \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ arbitrar. Din formulele lui Newton avem $S_m = -a_1 S_{m-1} \cdot -a_2 S_{m-2} - \cdots - a_{m-1} S_1 - m a_m$. Recursiv cu ajutorul formulelor lui Newton arătăm $S_1 = S_2 = \cdots = S_{m-1} = -2$, de unde

$$S_m = -(+2)(-2) - 3(-2) - \cdots - m(-2) - m(m+1) \Rightarrow$$

$$S_m = (2 + 3 + \cdots + m)(-2) - m(m+1) = 2(1 + 2 + \cdots + m) - m(m+1) - 1 = -2.$$

Pentru $m = n$ obținem $S_n = -2$.

Problema 5

Notând $S_n = x^n + y^n + z^n$, $n \in \mathbb{N}$, ipoteza se rescrie astfel: $S_1 = S_3 = \hat{1}$, $S_2 = \hat{2}$. Vom construim ecuația de gradul al treilea cu coeficienți în $\mathbb{Z}_7$ care are soluții x, y, z. Din $S_2 = \hat{2}$ și $S_1 = \hat{1} \Rightarrow$

$$(x + y + z)^2 = \hat{1} \Rightarrow S_2 + 2(xy + yz + zx) = \hat{1} \Rightarrow xy + yz + zx = \hat{3}.$$

Notăm $xyz = \hat{\alpha} \in \mathbb{Z}_7$. Atunci ecuația căutată este $t^3 - t^2 + \hat{3}t + \hat{\alpha} = \hat{0}$. Cum x, y, z sunt soluțiile ecuației, obținem $k^3 - k^2 + \hat{3}k + \hat{\alpha} = \hat{0}$ unde $k \in \{x, y, z\}$ și prin sumarea celor 3 relații vom găsi $S_3 - S_2 + \hat{3}S_1 + \hat{\alpha} = \hat{0} \Rightarrow -\hat{3}\hat{\alpha} = -\hat{2} \Rightarrow \hat{4}\hat{\alpha} = \hat{5}$. Alcătuind tabla înmulțirii cu $\hat{4}$ în $\mathbb{Z}_7$

$\hat{\alpha}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{4}\hat{\alpha}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$

obținem $\hat{\alpha} = \hat{3}$, deci ecuația căutată este $t^3 - t^2 + \hat{3}t + \hat{3} = \hat{0}$, de unde:

$$t^2(t - \hat{1}) + \hat{3}(t - \hat{1}) = \hat{0} \Rightarrow (t - \hat{1})(t^2 + \hat{3}) = \hat{0} \Rightarrow (t - \hat{1})(t^2 - \hat{4}) = \hat{0} \Rightarrow$$

$$(t - \hat{2})(t + \hat{2})(t - \hat{1}) = \hat{0} \Rightarrow (t - \hat{2})(t - \hat{5})(t - \hat{1}) = \hat{0}$$

și, cum 7 este număr prim, $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ este corp, de unde $\begin{cases} t_1 = \hat{1} \\ t_2 = \hat{2} \\ t_3 = \hat{3} \end{cases}$, așadar sistemul, care este simetric în x, y, z va avea $3! = 6$ soluții. adică $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$ și orice permutare a lor.

Problema 6

Din binomul lui Newton:

$$S=\sum_{i\neq j}\left(\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}x_i^{20-k}x_j^{k}\right)=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}\left(\sum_{i\neq j}x_i^{20-k}x_j^{k}\right)=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}\left(S_{20-k}S_k-S_{20}\right).$$

Folosind formulele lui Newton obținem $S_1=S_2=\cdots=S_6=0$ și $S_7=7$. Prin inducție după $n\in\mathbb{N}$ se arată $S_n=\begin{cases}7 & n=7k\\ 0 & n\neq 7k\end{cases}$, deci $S_7=S_{14}=7$ și $S_n=0$ pentru $n\in\{1,2,\ldots,20\}\setminus\{7,14\}\Rightarrow$

$$S=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}S_{20-k}S_k=C_{20}^{7}S_{13}S_7+C_{20}^{14}S_6S_{14}=0.$$

În încheiere propunem spre rezolvare câteva exerciții ce pot fi rezolvate folosind rezultatele prezentate în această notă:

Exercițiul 5 *Să se rezolve ecuația* $x^3+ax^2+x+1=0$ *știind că rădăcinile sale* x_1,x_2,x_3 *satisfac relațiile* $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$ *și* $x_1^4+x_2^4+x_3^4=4a-1$.

Admitere 1986

Exercițiul 6 *Fie* x_1,x_2,x_3 *rădăcinile ecuației* $x^3+x^2+x+a=0$, $a\in\mathbb{R}$. *Să se arate că:*
i) ecuația nu are toate rădăcinile reale;
ii) $4(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+3(x_1^4+x_2^4+x_3^4)=5$;
iii) $x_1^5+x_2^5+x_3^5=-1$;

* * *

Exercițiul 7 *Să se calculeze* $x,y,z\in\mathbb{Z}_n$ *știind că* $x+y+z=\hat{9}$, $x^2+y^2+z^2=\hat{7}$, $x^3+y^3+z^3=\hat{0}$

Sorin Ulmeanu

Exercițiul 8 *Să se determine coeficienții polinomului* $P=\det(XA-I_5)$, *unde* $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,5}}$, $a_{ii}=i$, $i=\overline{1,5}$, $a_{15}=1$ *și* $a_{ij}=0$ *în rest.*

Exercițiul 9 *Dacă* $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,5}}$, $a_{ii}=i$, $i=\overline{1,5}$, $a_{15}=1$ *și* $a_{ij}=0$ *în rest verificați dacă* A *este inversabilă și în caz afirmativ determinați* A^{-1}.

Exercițiul 10 *Dacă* $x_1,x_2,\cdots,x_5$ *sunt soluțiile ecuației* $x^5+1=0$, *să se calculeze suma*

$$\sum_{i\neq j}\left(x_i^2+x_j\right)^{21}.$$

Exercițiul 11 *Fie ecuația* $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$.
a) Găsiți condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația să aibă rădăcini reale;
b) Calculați determinantul $d=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}$, *unde* x_1,x_2,x_3 *sunt soluțiile ecuației din enunț.*

Bibliografie

[1] Gazeta Matematică.

[2] L. Panaitopol, I.C. Drăghicescu, *Polinoame și ecuații algebrice*, Editura Albatros

[3] V. Păun, *Bazele Informaticii*, Note de curs, Universitatea din Pitești

Colegiul Naţional „Ion C. Brătianu" Piteşti
sorinulm@yahoo.com