OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a

VARIANTA 2

1. Fie matricele A, B $\in M_2(\mathbf{R})$ .Să se arate că:

a) det(A+B) – det(A) –det(B)=tr(A)tr(B) – tr(AB).

b)Dacă A este inversabilă ,atunci ecuatia det(xA + B)=0 , are două soluții reale şi distincte dacă şi numai dacă are loc inegalitatea

$$(\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B))^2 > 4\det(A)\det(B) \ .$$

2.a)Să se calculeze X^n , n∈ N, dacă X = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b)Să se arate că orice două matrice pătratice de ordinul al treilea A şi B având toate elementele reale cu proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nu comută la înmultire .

c)Să se dea exemplu de două matrice pătratice A şi B de ordinul al treilea având toate elementele reale cu proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, n \geq 1$. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_1x_2...x_n$.

4.Pentru un şir de numere reale $(a_n)_n$ definim şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ prin x_n =min(a_n, a_{n+1}) şi y_n = max (a_n, a_{n+1}),(∀) n∈ N .

a)Să se arate că dacă şirul $(a_n)_n$ are limită atunci şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ au limită.

b)Este reciproca adevărată ?

c)Să se arate că dacă $(a_n)_n$ este doar mărginit şi verifică $a_{n+2} \leq \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$, ,(∀) n∈ N , atunci $(y_n)_n$ este convergent.

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.