OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

VARIANTA 2

1. Se consideră numerele complexe $z_1, , z_2 \ldots\ldots z_n$, nenule,astfel încat

$z_k . z_{k+1} - (1 - i) z_k - i = 0$,

Calculați produsul $z_1 . z_2 \ldots\ldots z_n$, $n \in \mathbf{N}^*$

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2^{5x+7} + 4^{4y+5} + 16^{3z+4} + 256^{t+3} = 64 \\ \log_2(5x+7) + \log_2(4y+5) + \log_2(3z+4) + \log_2(t+3) = 2 \end{cases}$$

3. Fie $x_1, x_2, \ldots x_n \in [0,1]$. Să se arate că:

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{1+x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \leq n - 1 + \frac{1}{1+x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Gazeta Matematică nr. 11 / 2013

4. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care verifică relația:$(f \circ f)(x) = x^3 + x - 8$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Știind că orice ecuație polinomială $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ cu coeficienții reali și de grad impar n are cel puțin o rădăcină reale:

a) să se arate că funcția f este bijectivă,

b) Calculați f(2).

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.