OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a IX-a

VARIANTA 2

BAREM DE CORECTARE:

Problema 1

Fie a,b,c numere reale strict positive. Arătaţi că:

$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

GM nr.11/2013

Soluţie:

Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$$a^2+bc\ge 2\sqrt{a^2bc} <=> \frac{1}{a^2+bc}\le\frac{1}{2\sqrt{a^2bc}} <=> \frac{a}{a^2+bc}\le\frac{1}{2\sqrt{bc}}$$
$$b^2+ac\ge 2\sqrt{b^2ac} <=> \frac{1}{b^2+ac}\le\frac{1}{2\sqrt{b^2ac}} <=> \frac{b}{b^2+ac}\le\frac{1}{2\sqrt{ac}}$$ **(2p)**
$$c^2+ab\ge 2\sqrt{c^2ab} <=> \frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2\sqrt{c^2ab}} <=> \frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2\sqrt{ab}}$$

De asemenea:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge\sqrt{\frac{1}{ab}}$$
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge\sqrt{\frac{1}{bc}}$$ **(2p)**
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})\ge\sqrt{\frac{1}{ac}}$$

Din relatiile de mai sus obtinem

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$ **(2p)**

Prin urmare :

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$ **(1p)**

Problema 2

Fie a$\in\mathrm{R}$. Rezolvaţi ecuaţia :

$[\mathbf{x}]^2+\left[\mathbf{x}+\frac{1}{2}\right]=\mathbf{a}+[2\mathbf{x}]$, unde $[\mathbf{x}]$ este partea întreagă a numărului real $\mathbf{x}$.

GM nr.11/2013

Soluţie:

Se cunoaşte egalitatea lui Hermite pentru n=2:

$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x].$ **(2p)**

Ecuația din enunț devine:

$[x]^2 + [2x] - [x] = a + [2x] <=> [x]^2 - [x] = a <=> [x]^2 - [x] - a = 0.$ **(1p)**

Ultima exuație are soluții reale $<=> 1 + 4a \geq 0$, a$\in \mathbb{Z} <=> a \in \mathbb{N}$. **(1p)**

Pe de altă parte: $[x]^2 - [x] = a <=> [x]([x] - 1) = a, \quad a \in \mathbb{N}$. **(1p)**

Prin urmare dacă $a = (k-1)k, \quad k \in \mathbf{N}$ atunci ecuația se reduce la:

$[x] = k, k \in \mathbf{N}$ și soluția va fi $x \in [k, k+1)$. **(1p)**

Pentru celelatle valori reale ale lui **a** ecuația nu are soluții reale. **(1p)**

Problema 3

Fie șirul $(a_n)_{n\in N^*}$ definit astfel: $a_1 = 0$ și $a_{n+1} = a_n + \sqrt{4a_n + 1} + 1, \; n \geq 1$.

a) Să se determine a_n .

b) Să se arate că $\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \cdots + \sqrt{4a_n+1} = n^2, \; n \geq 1$.

G.M. nr. 11/2011

Soluție: a) $a_1 = 0$. În relația din enunț dăm valori lui n$\in N^*$.

Pentru $n = 1 => a_2 = a_1 + \sqrt{4a_1 + 1} + 1 => a_2 = 2 = 1 \cdot 2$

Pentru $n = 2 => a_3 = 6 = 2 \cdot 3$

Pentru $n = 3 => a_4 = 12 = 3 \cdot 4$

....

Pentru $n = n - 1 => a_n = (n-1) \cdot n$ ....(2p)

Demonstrăm prin inducție matematică că $a_n = (n-1) \cdot n \quad (\forall)\, n \in N^*$

1) Verificarea este făcută.

2) $P(K) \rightarrow P(k+1) <=> a_k = (k-1) \cdot k \overset{?}{\Rightarrow} a_{k+1} = k(k+1)$

Cum $a_{k+1} = a_k + \sqrt{4a_k + 1} + 1$ și $a_k = (k-1) \cdot k =>$

$a_{k+1} = (k-1) \cdot k + \sqrt{4k(k-1) + 1} + 1$

$a_{k+1} = k^2 - k + \sqrt{(2k-1)^2} + 1$

$a_{k+1} = k^2 + k = k(k+1)$

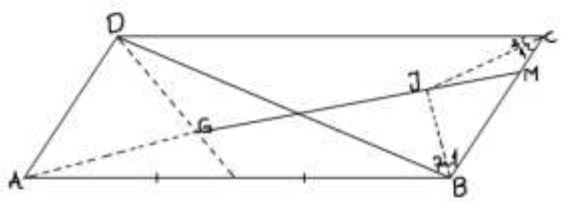
Din 1) și 2) $=> a_n = (n-1)n, \; (\forall) \; n \in N^*$ ....(2p)

b) Vom calcula suma $S_n = \sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \cdots + \sqrt{4a_n+1}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4a_k + 1} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ ....(3p)

Problema 4

În paralelogramul ABCD avem AB=4, BD=3, BC=2. Fie G= centrul de greutate al ΔABD, I=centrul cercului înscris în ΔBCD și M$\in$(BC) astfel încât $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$. Să se arate că G, I, M sunt coliniare.



Soluție:

Cum G este centrul de greutate al ΔABD avem:

$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \vec{r}_D)$ **(1)** **(1p)**

Cum I= centrul cercului înscris în ΔBCD de laturi 4, 3 și 2 avem:

$\overrightarrow{r_I} = \frac{4\overrightarrow{r_B}+3\overrightarrow{r_C}+2\overrightarrow{r_D}}{4+3+2}$ **(2)** **(1p)**

Cum $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{r_M} = \frac{1}{3}\overrightarrow{r_B} + \frac{2}{3}\overrightarrow{r_C} \Rightarrow \overrightarrow{r_M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_B} + 2\,\overrightarrow{r_C})$ **(3)** **(1p)**

Dar ABCD este paralelogram => $\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}$ **(4)** **(1p)**

Din $\xRightarrow{(\mathbf{1})\ \text{și}\ (\mathbf{4})} \overrightarrow{r_G} = \frac{1}{3}(2\,\overrightarrow{r_B} + 2\,\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C})$ **(5)**

$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{r_G} - \overrightarrow{r_M} \xRightarrow{(\mathbf{3})\ \text{și}\ (\mathbf{5})} \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(2\,\overrightarrow{r_B} + 2\,\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_D} - 3\overrightarrow{r_C})$ **(6)** **(1p)**

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{r_I} - \overrightarrow{r_M} \xRightarrow{(\mathbf{2})\ \text{și}\ (\mathbf{3})} \overrightarrow{MI} = \frac{1}{9}(4\overrightarrow{r_B} + 3\overrightarrow{r_C} + 2\overrightarrow{r_D}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_C})$

Obținem:

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_D} - 3\overrightarrow{r_C})\ /\cdot 3 \Rightarrow 3\overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_D} - 3\overrightarrow{r_C})$ **(7)** **(1p)**

$\xRightarrow{(6)\text{și}\ (7)} \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MI}$ =>punctele G, I, M sunt coliniare. **(1p)**