OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a VIII-a

VARIANTA 2

BAREM DE CORECTARE:

1. a) Dacă: $m = 7k, k \in N^* \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7$; $m = 7k + 1 \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7 + 1$; $m = 7k + 2 \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7 + 4$; $m = 7k + 3 \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7 + 2$; $m = 7k + 4 \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7 + 2$; $m = 7k + 5 \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7 + 4$; $m = 7k + 6 \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7 + 1 \Rightarrow m^2 = \mathcal{M}7 + r, r \in \{0, 1, 2, 4\}$, ... 1p

analog se obține pentru $n^2 = \mathcal{M}7 + p, p \in \{0, 1, 2, 4\} \Rightarrow m^2 + n^2 = \mathcal{M}7 + r + p = \mathcal{M}7 + t$ și $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 1p

Dintre aceste forme ale numărului $m^2 + n^2$ multipli ai lui 7 există numai pentru $t = 0$, care se realizează dacă și numai dacă $r = p = 0$, adică $m \vdots 7$ și $n \vdots 7$. 1p

b) $2x + 5y = m^2$, $5x + 2y = n^2 \Rightarrow 7 (x + y) = m^2 + n^2 \Rightarrow (m^2 + n^2) \vdots 7$ 1p

$\overset{a)}{\Leftrightarrow} m, n \vdots 7 \Leftrightarrow m^2, n^2 \vdots 49 \Rightarrow 7 (x + y) \vdots 49 \Rightarrow (x + y) \vdots 7$ 1p

$\Rightarrow m^2- n^2 = 3y - 3x = 3 (y - x) \vdots 49 \Rightarrow (y - x) \vdots 7$ 1p

și aplicând criteriul sumei și al diferenței de divizibilitate se obține: $2y \vdots 7 \Rightarrow y \vdots 7$ și $2x \vdots 7 \Rightarrow x \vdots 7$. 1p

2. Cazul I: $x < 1 \Rightarrow x - 2015 < 1 - 2015 = - 2014 \Rightarrow | x - 2015 | > 2014 \Rightarrow$

$\sqrt{|x-2015|} > \sqrt{2014}$, deci ecuația nu are soluție. 2p

Cazul II: $1 \leq x \leq 2015 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow | x - 1| = x - 1$

$\Rightarrow x - 2015 \leq 0 \Rightarrow | x - 2015 | = - x + 2015$ 1p

După ridicare la pătrat ecuția devine: $x - 1 + 2\sqrt{|x-1|\cdot|x-2015|} - x + 2015 = 2014 \Leftrightarrow$

$| x - 1 |\cdot| x - 2015 | = 0 \Rightarrow x = 1$ sau $x = 2015$. 2p

Cazul III: $x > 2015 \Rightarrow x - 1 > 2014 \Rightarrow | x - 1 | > 2014 \Rightarrow \sqrt{|x-1|} > \sqrt{2014}$, deci ecuația nu are soluție.

Soluția ecuației este: $x \in \{1, 2015 \}$. 2p

3. a) După îndoire, laturile ΔABC au dimensiunile $AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$, $CB = a\sqrt{2} \xRightarrow{R.t.Pit.} CB \perp AB$, ... 1p

cum (1) $CO \perp (ABM)$, $\xRightarrow{R1T3p} OB \perp AB$; 1p

b) Cum $CO \perp (ABM) \Rightarrow d(C, (ABM)) = CO$ 1p

Aplicând teorema lui Pitagora în ΔABC se obțin: $BC = 2a$ cm, $AM = BM = MC = a$ cm, iar folosind reciproca teoremei lui Pitagora, ΔBMC după îndoire devine dreptunghic în M. 1p

Din (1) şi CM $\perp$ MB $\xRightarrow{R1T3p}$ OM $\perp$ BM. 1p

Cum ΔABM este echilateral $\Rightarrow$ m(<OBM) = 90^0 - m(<ABM) = 30^0 $\Rightarrow$ OM = $\frac{BM\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .. 1p

şi aplicând teorema lui Pitagora în ΔOCM (m(<COM) = 90^0) se obţine CO = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 1p

4. a) Fie DE $\cap$ AC ={ M } $\Rightarrow$ (BED) $\cap$ (ABC) = BM = d 1p

Din AE $\perp$ AC, AE $\perp$ AB $\Rightarrow$ AE $\perp$ (ABC), cum AE // DC $\Rightarrow$

DC $\perp$ (ABC), d $\subset$ (ABC) $\Rightarrow$ DC $\perp$ d. 1p

b) Fie AN $\perp$ d, cum AE $\perp$ (ABC) $\xRightarrow{T3p}$ EN $\perp$ d, fie DP // NE, P $\in$ d $\Rightarrow$
DP $\perp$ d $\Rightarrow$ d(D, d) = DP 1p

Din Δ AEM ~ Δ CDM (1) $\Rightarrow \frac{AE}{DC} = \frac{AM}{MC} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{AM}{AM+3} \Rightarrow$ AM = 6

Aplicând T. Pitagora în Δ ABM şi Δ AEN se obţin: BM = 10, AN = $\frac{AB\cdot AM}{BM} = \frac{8\cdot 6}{10} = \frac{24}{5}$, respectiv

$NE^2 = \frac{576}{25} + 8 = \frac{776}{25} \Rightarrow$ NE $= \frac{2\sqrt{194}}{5}$ 1p

Din Δ NEM ~ Δ PDM şi (1) $\Rightarrow \frac{AE}{DC} = \frac{ME}{MD} = \frac{NE}{DP} \Rightarrow$ DP = $\frac{3\sqrt{194}}{5}$. 1p

c) (BED) $\cap$ (ABC) = d, AN $\perp$ d, EN $\perp$ d $\Rightarrow$ m(< (BDE),(ABC)) = m(< ENA) şi 1p

tg(< ENA) = $\frac{AE}{AN} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{24}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$. 1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.