INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARGEȘ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul Județean „Dan Barbilian” – Ediția a XXVII-a
14 decembrie 2013 - MIOVENI
Clasa a XI-a

Varianta 2

SUBIECTE:

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$.

a) Să se arate că dacă $X\in M_3(\mathbf{R})$ astfel încât $AX=XA$ și $X^2=0_3$, atunci $X=0_3$.

b) Să se arate că dacă $X\in M_3(\mathbf{R})$ și n este un număr natural nenul astfel încât $AX=XA$ și $X^n=0_3$, atunci $X=0_3$.

2.a) Fie A$\in M_3(Z)$ *astfel încât* $A+{}^tA=O_3$. Demonstrați că determinantul matricei I_3-A^2 este pătrat perfect și că determinantul matricei I_3+A^2 este suma a doua pătrate perfecte.

b) Fie A, B $\in M_2(\mathbf{Z})$ cu AB = BA și det A = det B = 0. Să se arate det (A^3+B^3) este cubul unui număr întreg.

3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}$, $(\forall)$ n$\in N^*$.Demonstrați că :

a) $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$; **b)** $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$; **c)** $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{n}-1\right)=\frac{1}{9}$.

4.Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde a_1=1 și $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{n}+1, \textit{dacă } n \textit{ este par}\\ a_n+\frac{1}{n}, \textit{dacă } n \textit{ este impar}\end{cases}$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore